

## Лабораторная работа № 1-04

### МОМЕНТ ИНЕРЦИИ РАЗЛИЧНЫХ ТЕЛ. ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА

#### 1. Цель работы

Определение моментов инерции различных тел по периоду крутильных колебаний и экспериментальная проверка теоремы Штейнера.

#### 2. Теоретическое введение

Момент инерции тела  $I$  используется при описании динамики вращательного движения твердого тела, основным уравнением которой является:

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon}, \quad (1)$$

где  $\vec{M}$  – проекция на ось вращения суммарного момента сил, действующих на тело;  $I$  – момент инерции тела относительно этой оси вращения;  $\vec{\varepsilon} = \frac{d^2 \vec{\varphi}}{dt^2}$  – угловое ускорение тела;  $\vec{\varphi}$  – угол поворота.

Величина момента инерции, как мера инертности тела при вращательном движении, зависит от формы и размеров тела, массы тела и ее пространственного распределения, а также от выбора оси вращения.

В общем случае момент инерции тела относительно произвольной оси вращения определяется интегрированием по объему тела:

$$I = \int_V r^2 \rho dV, \quad (2)$$

где  $r$  – расстояние выделенного элемента объема тела  $dV$  от оси вращения;  $\rho$  – плотность тела.

Определение величины момента инерции для тел сложной формы и неоднородного распределения массы целесообразно проводить экспериментальными методами с использованием закона динамики вращательного движения твердого тела.

В данной работе экспериментальный метод определения момента инерции основан на использовании механической системы, создающей крутильные колебания исследуемого твердого тела. В механическую систему входят ось с винтом для закрепления диска, соединенная жестко со спиральной пружиной, и диск с отверстиями для возможного смещения точки вращения. Для выведения системы из равновесия достаточно повернуть исследуемое тело на некоторый первоначальный угол  $\varphi_0$ . При

этом спиральная пружина закручивается на этот же угол. Возникающий момент  $\vec{M}$ , который создается пружиной, стремится вернуть систему в состояние равновесия. Так появляются крутильные слабо затухающие колебания. Если пренебречь трением в системе, то с некоторым приближением можно воспользоваться законом сохранения механической энергии и законом динамики вращательного движения.

Потенциальная энергия закрученной спиральной пружины определяется по формуле:

$$E_n = \frac{N\varphi_0^2}{2}, \quad (3)$$

где  $N$  – модуль кручения спиральной пружины;  $\varphi_0$  – начальный угол закручивания.

При крутильных колебаниях потенциальная энергия спиральной пружины периодически переходит в кинетическую энергию вращательного движения тела и обратно.

Кинетическая энергия вращающегося тела –

$$E_k = \frac{I\omega_0^2}{2}, \quad (4)$$

где  $\omega_0$  – амплитуда угловой скорости вращения тела.

При отсутствии трения из закона сохранения энергии следует, что  $E_k = E_n$ , откуда находим:

$$\omega_0 = \varphi_0 \sqrt{\frac{N}{I}}. \quad (5)$$

При упругом закручивании спиральной пружины действующий момент сил  $M$  пропорционален углу закручивания  $\varphi$ :

$$M = -N\varphi, \quad \text{а} \quad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (6)$$

Тогда уравнение динамики вращательного движения (1) будет иметь вид:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -N\varphi \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + f^2 \cdot \varphi = 0. \quad (7)$$

Это дифференциальное уравнение является уравнением незатухающих крутильных колебаний с собственной частотой  $f = \sqrt{\frac{N}{I}}$ . Его решением является функция, определяющая зависимость  $\varphi$  от  $t$  и имеющая вид:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{N}{I}}t + \alpha_0\right), \quad (8)$$

где  $\varphi_0$  - амплитуда и  $\alpha_0$  - произвольная начальная фаза колебаний, которые определяются из начальных условий.

Период колебаний определяется как:

$$T = \frac{2\pi}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{N}}, \quad (9)$$

откуда величина момента инерции системы:

$$I = \frac{T^2}{4\pi^2} N. \quad (10)$$

Численное значение модуля кручения спиральной пружины определяется экспериментально путем измерения внешнего момента сил  $\vec{M}$  и угла поворота диска  $\varphi$ . Для проведения эксперимента необходимо приложить окружную (касательную) силу  $\vec{F}$  с помощью динамометра и определить угол поворота диска.

Модуль кручения определяется по среднеарифметическим значениям:

$$N = \left| \frac{\vec{M}}{\vec{\varphi}} \right|, \quad (11)$$

где  $M = h \cdot F$ ,  $h$  – расстояние от центра вращения до точки приложения силы.

### 3. Описание экспериментальной установки.

Общий вид экспериментальной установки показан на рис.1.

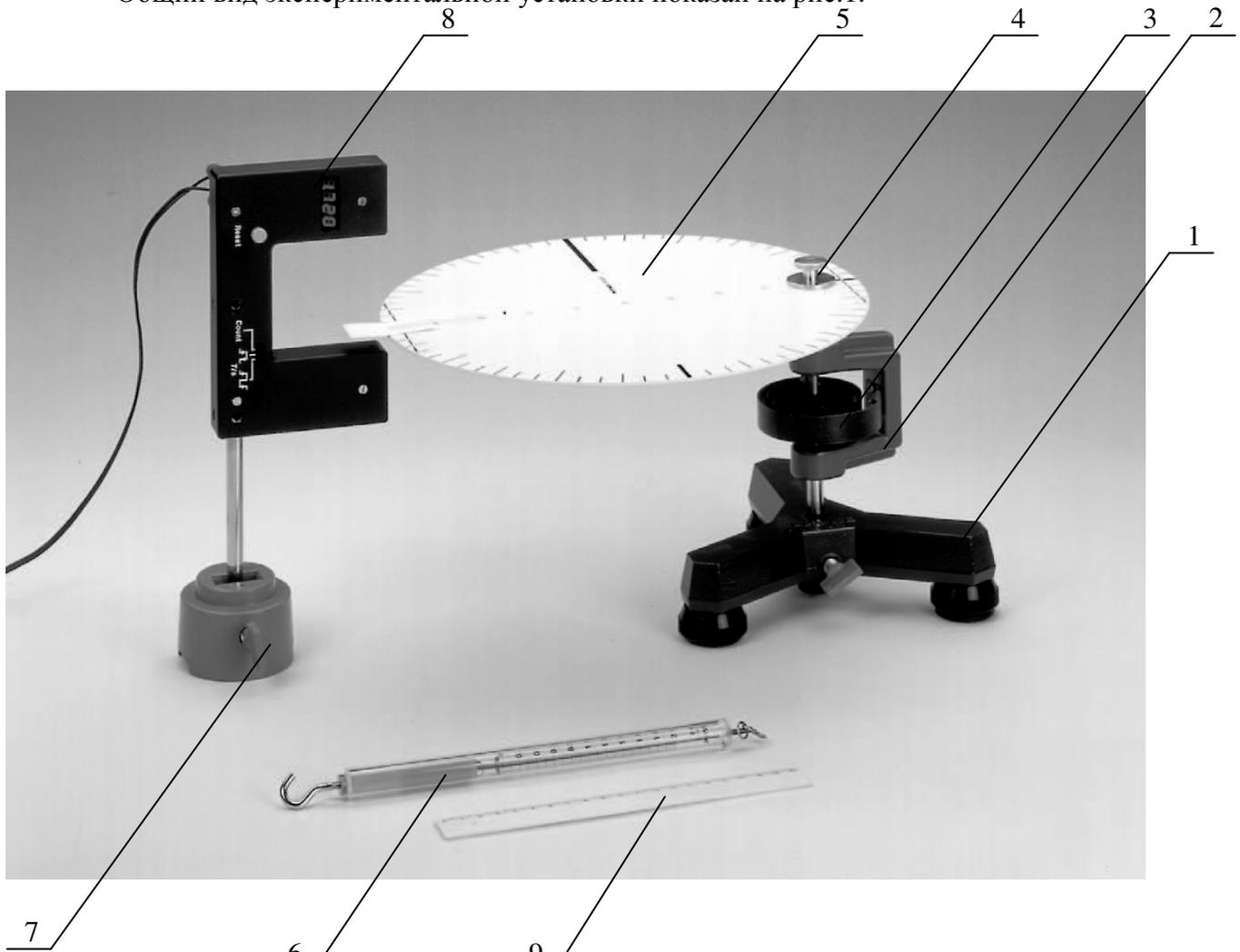


Рис.1. Общий вид установки:

1 – треножник, 2 – зажимная стойка, 3 – спиральная пружина, 4 – ось вращения с фиксатором, 5 – диск с отверстиями, 6 – динамометр, 7 – массивная опора, 8 – световой барьер со счетчиком времени и числа колебаний системы, 9 – линейка для измерения расстояний между отверстиями.

На треножнике 1 установлена зажимная стойка 2 с закрепленной спиральной пружиной 3, которая жестко связана с осью вращения 4 и фиксатором для закрепления диска 5. Для определения модуля кручения используется динамометр 6 для создания силы в наиболее удаленном отверстии диска. Шкала динамометра градуирована в единицах силы, а по краю плоскости диска нанесена шкала для определения угла поворота системы. На массивной опоре 7 закреплена вертикальная стойка, на которой установлен световой барьер 8. При пересечении прерывателем, установленным на диске светового луча в световом барьере, производится фиксация числа колебаний и времени движения системы.

#### 4. Порядок выполнения работы

При выполнении работы следует строго соблюдать общие требования по технике безопасности и охране труда, а также указания по проведению данной работы, находящиеся на рабочем месте студента в лаборатории.

4.1. Перед началом работы необходимо ознакомиться с устройством и принципом действия установки. Под руководством лаборанта или преподавателя проверить закрепления зажимной стойки, спиральной пружины, оси, правильность установки светового барьера со счетчиком времени и числа колебаний системы, устойчивость треножника и массивной опоры.

4.2. Проверить правильность соединения светового барьера с блоком питания и расположение переключателя в нижней позиции.

4.3. Закрепить на оси вращения диск в центральном отверстии.

4.4. Прикрепить динамометр с ценой деления 0,02 Н к наиболее удаленному отверстию диска и приложить окружную силу  $F$ . Величину силы измерять при значениях угла поворота диска  $\varphi = 60; 120; 180$  градусов. Опыт повторить три раза в прямом и обратном направлениях, результаты занести в таблицу 1. Линейкой 9 определить расстояние ( $h$ ) от центра вращения до этого отверстия. Необходимо следить, чтобы ось динамометра была касательной к соответствующей окружности диска.

4.5. Закрепить на диске дополнительные тела (цилиндры, массивный диск) согласно индивидуальному заданию.

4.6. Включить световой барьер.

4.7. Повернуть диск вокруг оси на первоначальный угол  $\varphi_0 = 120$  град (не более 180 град), освободить его и определить время полного периода колебаний  $T_i$  по показаниям секундомера. Результаты замеров занести в таблицу 2.

4.8. Изменяя положение дополнительных тел относительно оси вращения согласно индивидуальному заданию, провести серию опытов по три эксперимента на каждый вариант расположения дополнительных грузов.

4.9. Отключить установку и проверить целостность ее элементов.

## 5. Обработка результатов эксперимента

5.1. Проверить результаты всех замеров в таблицах 1 и 2.

Таблица 1. Определение модуля кручения

№ n/n	$F_i, H$	$\varphi_i, рад$	$M_i,$ $H \cdot м$	$N_i,$ $\frac{H \cdot м}{рад}$	$\bar{N},$ $\frac{H \cdot м}{рад}$	$\Delta N_i,$ $\frac{H \cdot м}{рад}$	$\Delta \bar{N},$ $\frac{H \cdot м}{рад}$	$N = \bar{N} \pm \Delta \bar{N},$ $\frac{H \cdot м}{рад}$
1								
2								
...								
12								

Таблица 2. Основной опыт

№ n/n	$a_1, м$	$a_2, м$	$T_i, с$	$\bar{T}, с$	$\Delta T_i, с$	$\Delta \bar{T}, с$	$\delta, \%$	$T = \bar{T} \pm \Delta \bar{T}$
1								
2								
3								
4								
5								
6								

Примечание: масса основного диска  $m_0 = 425$  г, радиус диска  $r_0 = 150$  мм;

масса дополнительного цилиндра №1:  $m_1 = 198$  г, радиус  $r_1 = 19,9$  мм;

масса дополнительного цилиндра №2:  $m_2 = 160$  г, радиус  $r_2 = 15,05$  мм;

Установка диска и дополнительных цилиндров производится согласно индивидуальному заданию (расстояние от оси вращения  $a=0, 30, 60, 90$  и  $120$  мм).

5.2. Вычислить модуль кручения спиральной пружины по экспериментальным данным таблицы 1

$$N_i = \frac{M_i}{\varphi_i}, \quad M_i = F_i \cdot h$$

определить относительную и абсолютную погрешности модуля кручения пружины

$$\delta_N = \frac{\Delta \bar{N}}{\bar{N}} = \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta \varphi}{\varphi}, \quad \Delta \bar{N} = \delta_N \cdot \bar{N},$$

приняв абсолютные погрешности  $\Delta F = 0,1$  Н;  $\Delta h = 1$  мм;  $\Delta \varphi = 2,5$  град ( $0,0436$  рад).

5.3. Вычислить момент инерции системы тел.

Используя результаты опытов по определению времени периода колебаний  $\bar{T}$  (таблица 2), вычислить экспериментальное значение момента инерции  $\bar{I}_{\vartheta 1}$  и  $\bar{I}_{\vartheta 2}$  по формуле

$$\bar{I}_{\vartheta} = \frac{\bar{T}^2}{4\pi^2} \cdot \bar{N}.$$

Вычислить относительную и абсолютную погрешности определения моментов инерции для каждого значения  $a_2$  (таблицы 3.1 и 3.2)

$$\delta_{I_{\vartheta}} = \frac{\Delta \bar{I}_{\vartheta}}{\bar{I}_{\vartheta}} + 2 \frac{\Delta \bar{T}}{\bar{T}}, \quad \Delta \bar{I}_{\vartheta} = \delta_{I_{\vartheta}} \cdot \bar{I}_{\vartheta}.$$

5.4. Вычислить теоретические значения моментов инерции  $I_T$  системы из трех тел с учетом теоремы Штейнера:

$$I_T = I_{\vartheta} + I_{\vartheta 1} + I_{\vartheta 2},$$

где  $I_{\vartheta}$  - момент инерции диска,

$I_{\vartheta 1}$  - момент инерции цилиндра №1, расположенного на расстоянии  $a_1$  от оси вращения,

$I_{\vartheta 2}$  - момент инерции цилиндра №2, расположенного на расстоянии  $a_2$  от оси вращения.

Определить относительную и абсолютную погрешности, учитывая абсолютные погрешности измерения геометрических размеров тел:  $\Delta \bar{R} = 1$  мм,  $\Delta \bar{r} = 0,1$  мм, расстояние до оси вращения  $\Delta \bar{a}_i = 1$  мм и масс  $\Delta \bar{m} = 0,1$  г.

Теоретические значения моментов инерции сплошных тел:

*а) Круглый диск*

Момент инерции однородного круглого диска массы  $m$  и радиуса  $r$  относительно оси, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости:

$$I_0 = \frac{1}{2} m \cdot r^2.$$

*б) Сплошной цилиндр*

Момент инерции однородного цельного цилиндра массы  $m$  и радиуса  $r$  относительно оси, совпадающей с осью симметрии цилиндра:

$$I_0 = \frac{1}{2} m \cdot r^2.$$

*в) Полый цилиндр*

Момент инерции полого цилиндра массы  $m$  больше, чем сплошного цилиндра той же массы, и зависит от внутреннего  $r_1$  и внешнего  $r_2$  радиусов цилиндра. Масса полого цилиндра высотой  $h$  выражается как:

$$m = \rho \cdot h \cdot \pi (r_2^2 - r_1^2),$$

где  $\rho$  – плотность материала.

Вычисление момента инерции  $I$  по формуле (2) дает:

$$I_0 = \frac{1}{2} \rho \cdot h \cdot \pi (r_2^4 - r_1^4),$$

преобразовав которое, получаем:

$$I_0 = \frac{1}{2} \rho \cdot h \cdot \pi (r_2^2 - r_1^2) (r_2^2 + r_1^2).$$

Окончательно:

$$I_0 = \frac{1}{2} m (r_1^2 + r_2^2).$$

*г) Сфера*

Момент инерции однородного сферического тела массы  $m$  и радиуса  $r$  относительно оси, проходящей через его центральную точку, равен:

$$I_0 = \frac{2}{5} m \cdot r^2.$$

Для точного расчета момента инерции сложной системы используется теорема Штейнера.

***Теорема Штейнера.***

Согласно теореме Штейнера, момент инерции  $I$  тела, вращающегося вокруг произвольной оси, равен:

$$I = I_0 + m \cdot a^2,$$

где  $I_0$  - момент инерции относительно центральной оси, параллельной оси вращения и проходящей через центр масс тела;  $a$  - расстояние между осью вращения и центральной осью тела.

5.5. Вычислить теоретическое значение моментов инерции для основного диска  $I$  и двух цилиндров  $I_1$  и  $I_2$  относительно оси вращения с использованием теоремы Штейнера, значение суммарного момента инерции  $I_T$ . Сравнить с экспериментально найденным значением  $I_3$ , определить абсолютную и относительную погрешности измерения момента инерции системы тел. Результаты занести в таблицы 3.1 и 3.2.

Таблица 3.1. Сравнение экспериментальных и теоретических данных

Тело, входящее в систему	$m, \text{ кг}$	$r, \text{ м}$	$I_{Ti}, \text{ кг} \cdot \text{ м}^2$	$I_T, \text{ кг} \cdot \text{ м}^2$	$I_3, \text{ кг} \cdot \text{ м}^2$	$\Delta I$	$\delta, \%$
Диск							
Цилиндр №1							
Цилиндр №2, $a_2 = \dots$							

Таблица 3.2. Сравнение экспериментальных и теоретических данных

Тело, входящее в систему	$m, \text{ кг}$	$r, \text{ м}$	$I_{Ti}, \text{ кг} \cdot \text{ м}^2$	$I_T, \text{ кг} \cdot \text{ м}^2$	$I_3, \text{ кг} \cdot \text{ м}^2$	$\Delta I$	$\delta, \%$
Диск							
Цилиндр №1							
Цилиндр №2, $a_2 = \dots$							

## 6. Контрольные вопросы

1. Как определяются моменты инерции материальной точки, системы материальных точек, материального тела?
2. Какой физический смысл момента инерции и каково его применение в динамике вращательного движения?

3. Как сформулировать выражение механической энергии системы твердых тел, совершающей крутильные колебания?
4. Как определяются моменты инерции массивного диска, сплошного и полого цилиндров относительно главных центральных осей?
5. Как сформулировать уравнение незатухающих крутильных колебаний для системы твердых тел?

## 7. Библиографический список

*а) основная:*

1. Савельев И.В. Курс общей физики: в 5-ти кн., кн. 1: учебное пособие для вузов, М.: АСТ Астрель, 2005 г. – 336 с., с. 157-161, 164-177.
2. Капуткин Д.Е., Шустиков А.Г. Физика. Обработка результатов измерений при выполнении лабораторных работ. Учебное пособие. М.: МИСиС. 2007.-108с.

## 8. Индивидуальные задания

### Задание 1.

1. Вывести формулы для определения момента инерции диска с центральным отверстием относительно центральной оси, перпендикулярной его плоскости.
2. Объяснить влияние сил трения в механической системе на точность результатов измерений.
3. Провести серию опытов по определению модуля кручения и момента инерции диска ( $a_0 = 0$ ) с дополнительными цилиндрами, закрепленными на расстоянии: цилиндр №1 -  $a_1 = 60$  мм; цилиндр №2 -  $a_2 = 30$  и 90 мм. Проверить теорему Штейнера.

### Задание 2.

1. Вывести формулу для определения момента инерции сплошного диска относительно оси перпендикулярной его плоскости, проходящей через точку на боковой поверхности.
2. Объяснить влияние размеров и массы дополнительного тела на результаты измерений.
3. Провести серию опытов по определению модуля кручения и момента инерции диска ( $a_0 = 0$ ) с дополнительными цилиндрами, закрепленными на расстоянии: цилиндр №1 -  $a_1 = 60$  мм; цилиндр №2 -  $a_2 = 60$  и 120 мм. Проверить теорему Штейнера.

**Задание 3.**

1. Вывести формулу для определения момента инерции тонкого кольца относительно оси, проходящей через крайнюю боковую точку перпендикулярно его плоскости.
2. Объяснить влияние момента инерции оси вращения с устройством закрепления исследуемых тел на точность результатов измерений.
3. Провести серию опытов по определению модуля кручения и момента инерции диска ( $a_0 = 0$ ) с дополнительными цилиндрами, закрепленными на расстоянии: цилиндр №1 -  $a_1 = 90$  мм; цилиндр №2 -  $a_2 = 30$  и  $90$  мм. Проверить теорему Штейнера.

**Задание 4.**

1. Вывести формулу для определения момента инерции сплошного цилиндра, относительно его центральной продольной оси.
2. Вывести основную формулу для периода крутильных колебаний и объяснить причину их возникновения в механической системе лабораторной установки.
3. Провести серию опытов по определению модуля кручения и момента инерции диска ( $a_0 = 0$ ) с дополнительными цилиндрами, закрепленными на расстоянии: цилиндр №1 -  $a_1 = 90$  мм; цилиндр №2 -  $a_2 = 60$  и  $120$  мм. Проверить теорему Штейнера.