

Лабораторная работа № 2-11

ТЕПЛО- И ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ МЕТАЛЛОВ

(ЗАКОН ВИДЕМАНА-ФРАНЦА)

Ю.А. Андреевко, Э.Н. Колесникова

Цель работы

Экспериментальное исследование явлений переноса на примере тепловой и электрической проводимости металлов.

Теоретическое введение

Всякое тело (или система тел) может находиться в различных состояниях, отличающихся давлением, объёмом, температурой и т.д. Величины, характеризующие состояние тела (системы тел), называются параметрами состояния.

Равновесным состоянием системы называется такое состояние, при котором все параметры системы имеют определённые значения, остающиеся при неизменных внешних условиях постоянными.

Если хотя бы один из параметров в разных точках тела в один и тот же момент времени неодинаков, то для всего тела нельзя задать определённое значение этого параметра, и в этом случае состояние называется неравновесным.

При нарушении равновесия (когда внешние условия неизменны) система стремится вернуться в равновесное состояние. Процессы, возникающие при нарушениях равновесия, называются *явлениями переноса*. К явлениям переноса, в частности, относятся *теплопроводность* и *электропроводность* металлов. Эти процессы взаимосвязаны, поскольку осуществляются электронами проводимости (свободными электронами в классической электронной теории).

Классическая электронная теория электропроводности и теплопроводности металлов

Классическая теория электропроводности металлов создавалась Друде и Лоренцом на основе представлений о свободных электронах. По этой теории предполагалось, что электроны проводимости в металле ведут себя как молекулы идеального газа, то есть между соударениями они движутся свободно, проходя в среднем некоторый путь λ , называемый средней длиной свободного пробега. Если электрического поля внутри проводника нет, то в результате столкновений электронов с ионами кристаллической решётки устанавливается тепловое равновесие между электронным газом и кристаллической решёткой, и столкновение электронов друг с другом можно не учитывать.

Средняя тепловая скорость хаотического движения электронов определяется по формуле:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}},$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг – масса электрона.

При включении однородного электрического поля на хаотическое тепловое движение электронов накладывается упорядоченное движение с некоторой средней скоростью $\langle \vec{u} \rangle$. Плотность возникающего электрического тока определяется по формуле:

$$\vec{j} = ne\langle \vec{u} \rangle, \quad (11.1)$$

где n – концентрация электронов, $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона.

Считается, что энергия, приобретаемая электроном в упорядоченном движении, полностью передаётся иону при столкновении, а скорость упорядоченного движения электрона после столкновения становится равной нулю.

На основе изложенных выше представлений выводится закон Ома (вывод поясняет рис. 11.1).

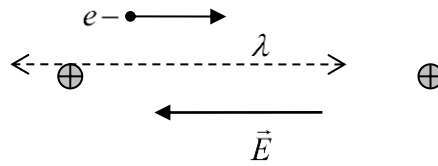


Рис. 11.1. К выводу закона Ома

Ускорение в электрическом поле напряженности \vec{E} , приобретаемое электроном, есть:

$$\vec{a} = \frac{e\vec{E}}{m}. \quad (11.2)$$

На пути свободного пробега λ максимальная скорость упорядоченного движения электрона достигнет величины

$$\vec{u}_{\max} = \vec{a}\tau = \frac{e\vec{E}}{m}\tau, \quad (11.3)$$

где $\tau = \lambda/\langle v \rangle$ – время свободного пробега.

Среднее значение скорости упорядоченного движения есть:

$$\langle \vec{u} \rangle = \frac{\vec{u}_{\max}}{2} = \frac{e\vec{E}}{2m}\tau. \quad (11.4)$$

Подставив это значение в формулу для плотности тока (11.1), будем иметь:

$$\vec{j} = \langle \vec{u} \rangle ne = \frac{ne^2\lambda}{2m\langle v \rangle} \vec{E}. \quad (11.5)$$

Полученная формула представляет собой **закон Ома** в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad \sigma = \frac{ne^2\lambda}{2m\langle v \rangle}, \quad (11.6)$$

где σ – удельная проводимость металла (или коэффициент электропроводности):

$$\sigma = \frac{ne^2\lambda}{2m\langle v \rangle} = \frac{ne^2\tau}{2m}. \quad (11.7)$$

Перейдём к рассмотрению классической теории теплопроводности электронного газа.

Экспериментально установлено, что теплопроводность газа определяется формулой:

$$dQ = \chi \cdot \frac{dT}{dz} \cdot S \cdot dt, \quad (11.8)$$

где dQ — количество теплоты, переносимое за время dt через площадку S , расположенную перпендикулярно оси z ; $\frac{dT}{dz} = gradT$ — градиент температуры газа; χ — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом теплопроводности. Он зависит от свойств газа и условий, при которых находится газ.

В слое с большей температурой молекулы газа имеют большую среднюю кинетическую энергию, чем в слое с меньшей температурой. Попадая при хаотическом движении в этот слой, они при столкновениях с другими молекулами слоя передают им избыток своей энергии и тем самым увеличивают его температуру. Молекулы, попадающие из слоя с меньшей температурой в слой с большей температурой, будут увеличивать свою энергию за счет других молекул, а температура слоя будет понижаться его температуру. Поэтому в молекулярно-кинетической теории перенос количества теплоты dQ через площадку S рассматривается, как перенос через эту площадку средней кинетической энергии хаотического движения молекул.

Из тех же соображений, что и при вычислении вязкости газа, молекулам, пролетающим площадку S снизу вверх, нужно приписать среднюю энергию, соответствующую температуре $\left(T - \langle \lambda \rangle \cdot \frac{dT}{dz}\right)$, в плоскости $(z - \langle \lambda \rangle)$, а молекулам, летящим сверху вниз, значение энергии, определяемое температурой $\left(T + \langle \lambda \rangle \cdot \frac{dT}{dz}\right)$, в плоскости $(z + \langle \lambda \rangle)$.

Средняя кинетическая энергия молекулы газа связана с его температурой соотношением:

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T. \quad (11.9)$$

Поэтому вверх через площадку S из нижнего слоя одной молекулой в среднем переносится энергия $\frac{3}{2} \cdot k \cdot \left(T - \langle \lambda \rangle \cdot \frac{dT}{dz} \right)$, а обратно $\left(-\frac{3}{2} \cdot k \cdot T \right)$.

Соответственно из верхнего более горячего слоя вниз переносится энергия $\frac{3}{2} \cdot k \cdot \left(T + \langle \lambda \rangle \cdot \frac{dT}{dz} \right)$, а обратно $\left(\frac{3}{2} \cdot k \cdot T \right)$.

Разность этих величин, равная

$$3k \cdot \frac{dT}{dz} \cdot \langle \lambda \rangle, \quad (11.10)$$

представляет собой среднюю энергию, переносимую одной молекулой, перелетающей из слоя в слой.

При небольшой разнице в температуре слоев газа можно считать, что произведение числа n молекул в единице объема газа на среднюю скорость $\langle v \rangle$ молекул для обоих слоев приблизительно одинаково. Тогда, как и при вычислении вязкости газа, число молекул, пролетающих в одном направлении через площадку S в единицу времени, равно

$$\frac{1}{6} n \cdot \langle v \rangle \cdot S. \quad (11.11)$$

Таким образом, количество средней кинетической энергии хаотического движения молекул, переносимое через площадку S за время dt , т. е. переносимое количество теплоты равно:

$$dQ = 3k \cdot \frac{dT}{dz} \cdot \langle \lambda \rangle \cdot \frac{1}{6} \cdot n \cdot \langle v \rangle \cdot S \cdot dt. \quad (11.12)$$

Равенство (11.12) называется *уравнением Фурье*.

Сравнивая полученное выражение с эмпирической формулой (11.8), нетрудно найти, что коэффициент теплопроводности равен:

$$\chi = \frac{1}{2} k \cdot n \cdot \langle v \rangle \cdot \langle \lambda \rangle. \quad (11.13)$$

Это выражение можно преобразовать, введя удельную теплоемкость c_v . Поскольку $\frac{3}{2} k \cdot T \cdot n$ есть средняя энергия молекул в единице объема газа, то количество теплоты, необходимое для нагревания единицы объема газа на один градус при постоянном объеме, равно $\frac{3}{2} k \cdot n$. Так как масса единицы объема газа равна его плотности ρ , то удельная теплоемкость газа будет:

$$c_v = \frac{3}{2} k \cdot n \cdot \frac{1}{\rho}, \quad (11.14)$$

откуда $k \cdot n = \frac{2c_v \rho}{3}$.

Подставив это выражение в формулу (11.13), получим:

$$\chi = \frac{1}{3} \rho \cdot \langle v \rangle \cdot \langle \lambda \rangle \cdot c_v. \quad (11.15)$$

В 1853 году Видеман и Франц эмпирически установили закон, согласно которому отношение коэффициента теплопроводности χ к коэффициенту электропроводности σ для всех металлов приблизительно одинаково и изменяется прямо пропорционально абсолютной температуре:

$$\frac{\chi}{\sigma} = LT, \quad (11.16)$$

где $L = 2.4 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт Ом}}{\text{К}^2}$ (коэффициент пропорциональности L называется числом Лоренца).

Разделив χ на σ , полученные из классических представлений о теплопроводности и электропроводности металлов, приходим к **закону Видемана-Франца**:

$$\frac{\chi}{\sigma} = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T. \quad (11.17)$$

Подставив в (11.17) $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К и $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, найдем, что

$$L = 2,23 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт Ом}}{\text{К}^2}, \quad (11.18)$$

что очень хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Впоследствии выяснилось, что при учёте распределения электронов по скоростям из классической теории следует, что $\frac{\chi}{\sigma} = 2 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T$, что хуже согласуется с экспериментом.

Согласие теории с экспериментом было достигнуто лишь в квантовой теории металлов.

Теория метода

Если тепловая энергия распространяется в направлении оси x , уравнение (11.8) принимает вид:

$$\frac{dQ}{dt} = -\chi S \cdot \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (11.19)$$

Скорость изменения температуры со временем в направлении градиента температуры подчиняется *уравнению Больцмана*:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\chi}{\rho c} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (11.20)$$

где ρ – плотность и c – удельная теплоемкость вещества.

Пусть тепловая энергия переносится по металлическому пруту определенного сечения и длины l , а на концах прута при помощи двух термостатов поддерживаются постоянные температуры T_1 и T_2 . Тогда через некоторое время достигается стационарное состояние, при котором температура в каждой точке прута со временем изменяться не будет, то есть:

$$\frac{dT}{dt} = 0. \quad (11.21)$$

В этом состоянии с учётом уравнения (11.20) для распределения температуры вдоль прута получится равенство:

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{l} x + T_1. \quad (11.22)$$

Рис. 11.2 даёт наглядное представление о процессе переноса тепловой энергии в соответствии с приведенными уравнениями для рассматриваемого нами случая.

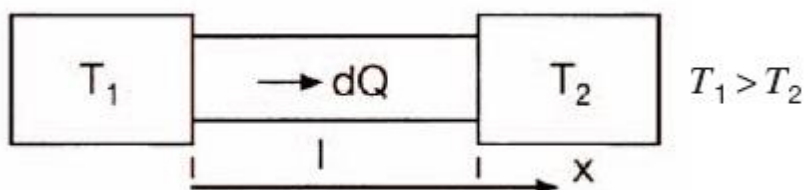


Рис. 11.2. Схематическое представление переноса тепловой энергии вдоль прута.

Теплоемкость калориметра может быть найдена по следующей формуле:

$$C = c_B m_B \frac{T_g - T_k}{T - T_k}, \quad (11.23)$$

где c_B – теплоемкость воды, m_B – масса воды, T_g – температура горячей воды, T – установившаяся температура, T_k – температура комнаты.

Формула (11.23) выводится из уравнения теплового баланса:

$$C(T - T_k) = c_g \cdot m_g (T_g - T_k)$$

Вычисления по формуле (11.23) дают числовое значение теплоёмкости калориметра с относительной погрешностью $\varepsilon = \pm 25\%$. Большая погрешность теплоёмкости калориметра связана с методикой эксперимента.

Количество теплоты, переданное калориметру с меньшей температурой, может быть вычислено по формуле:

$$\Delta Q = (m_B c_B + C) \Delta T, \quad (11.24)$$

где $\Delta T = T - T_0$, T – температура воды в калориметре, а T_0 – температура в момент времени $t = 0$.

Температура на конце металлического прута является функцией времени и в процессе эксперимента остается практически постоянной, то есть уравнение (11.21) удовлетворяется.

Чтобы вычислить скорость переноса тепловой энергии в металлическом пруте $\frac{dQ}{dt}$ согласно уравнению (11.19), необходимо учесть количество теплоты, полученное калориметром с водой от окружающей среды:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{dQ_{\text{сп}}}{dt} = \frac{dQ_{\text{пол}}}{dt}. \quad (11.25)$$

Скорость передачи тепловой энергии от окружающей среды $dQ_{\text{сп}}/dt$ можно определить по наклону графика зависимости Q от t (рис. 11.3).

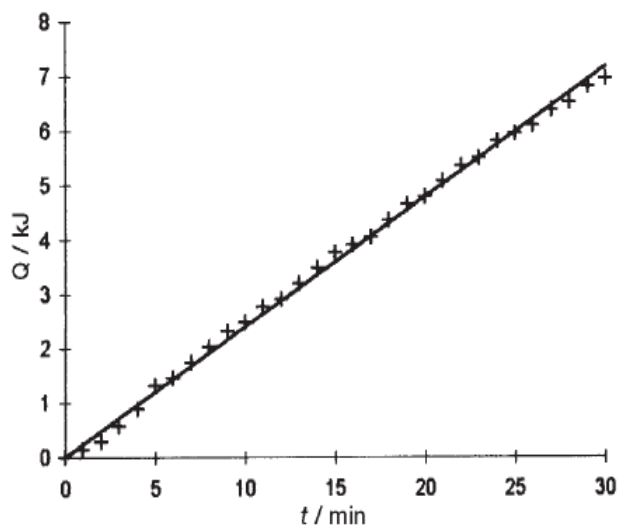


Рис. 11.3. График зависимости от времени тепловой энергии, полученной калориметром с водой от окружающей среды.

Полный учёт поступлений тепловой энергии, то есть скорость передачи тепловой энергии калориметру с водой от окружающей среды и металлического прута $dQ_{\text{пол}}/dt$, определяется по наклону графика зависимости Q от t (рис. 11.4). Далее по полученным экспериментально данным, а также по известной длине прута ($\Delta x = 31,5$ см) и известной площади поперечного сечения ($S = 4,91 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$) из уравнения (11.19) может быть вычислен коэффициент теплопроводности.

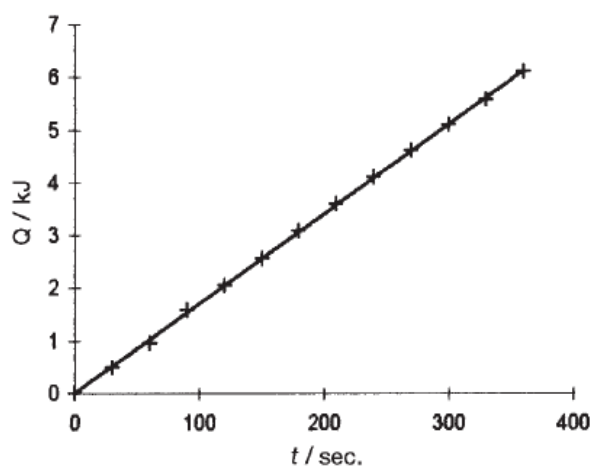


Рис. 11.4. График зависимости от времени тепловой энергии, переданной калориметру с водой от окружающей среды и металлического прута.

Для проверки закона Видемана-Франца в данном эксперименте остаётся определить коэффициент электропроводности. Для этого необходимо измерить сопротивление прута R , а затем, используя данные о его геометрических размерах (длина l и площадь поперечного сечения S), вычислить коэффициент электропроводности по формуле:

$$\sigma = \frac{l}{S \cdot R}. \quad (11.26)$$

Описание экспериментальной установки

Общий вид экспериментальной установки для определения *коэффициента теплопроводности* приведен на рис. 11.5.



Рис. 11.5. Экспериментальная установка для определения коэффициента теплопроводности.

Оборудование установки состоит из двух калориметров (по 500 мл), медного и алюминиевого прутков, блока для измерения температур, термодатчиков, секундомера, мензурки, треноги, зажимов, блока поддержки, сумки из марли, термопасты.

Общий вид экспериментальной установки для определения *коэффициента электропроводности* и схема её включения приведены на рис. 11.6 и рис. 11.7, соответственно.



Рис. 11.6. Общий вид экспериментальной установки для определения коэффициента электропроводности.

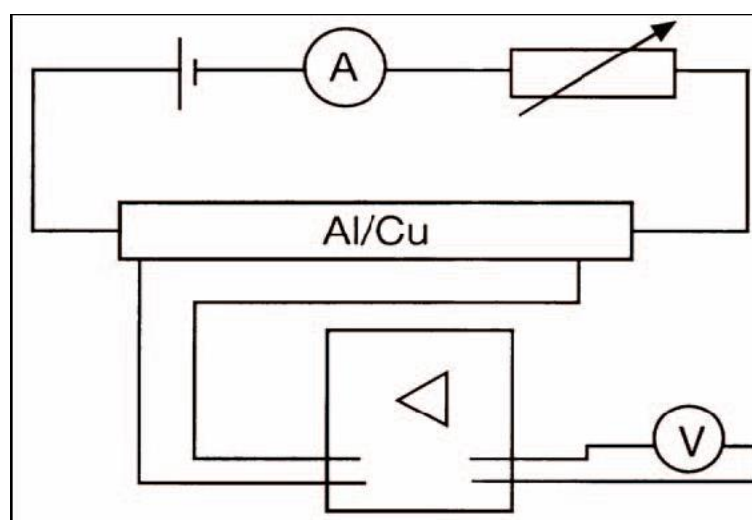


Рис. 11.7. Принципиальная электрическая схема установки для определения коэффициента электропроводности.

Оборудование экспериментальной установки для определения коэффициента электропроводности содержит медный и алюминиевый пруты, источник постоянного напряжения, универсальный усилитель, мультиметр, реостат и соединительные провода.

После ознакомления с приборами необходимо заполнить табл. 11.1.

Таблица 11.1

Технические данные приборов

№ п/п	Наименование прибора	Пределы измерений	Число делений	Цена деления	Класс точности	Абсолютная приборная погрешность
1	Блок для измерения температур					1 °С
2	Секундомер					1с
3	Источник постоянного напряжения	0... 12 В				
4	Усилитель					
5	Мультиметр 1					
6	Мультиметр 2					

Порядок выполнения работы

При выполнении работы необходимо строго соблюдать правила техники безопасности и охраны труда, установленные на рабочем месте студента в лаборатории.

1. Взвесить калориметр. Измерить и сделать запись в рабочей тетради температуры комнаты и температуры предварительно подогретой воды.

После заполнения калориметра горячей водой, определить температуру воды в калориметре. Повторно взвесить калориметр, чтобы определить массу воды, которая в нём содержится.

2. С помощью льда (в марлевом мешке) довести температуру воды в нижнем калориметре до $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Удалить лёд.

Определить влияние окружающей среды на нагревание воды после удаления из неё льда, измеряя повышение температуры воды в нижнем калориметре от $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ в течение 30 минут. Измерение температуры производить с интервалом 3 мин. Взвесить калориметр, чтобы определить массу воды. Полученные результаты записать в табл. 11.2.

Таблица 11.2.

Данные для учета влияния окружающей среды на процесс теплопередачи

$m_{\text{в}}, \text{ кг}$											
$t, \text{ мин}$	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
$T, \text{ К}$	273										
$Q, \text{ Дж}$	0										

3. Собрать экспериментальную установку согласно рис. 11.1. Взвесить пустой нижний калориметр. Вставить неизолированный конец металлического прута в дно верхнего калориметра (в углубление дна верхнего калориметра). Для улучшения теплопередачи покрыть конец металлического прута термопастой.

4. Укрепить металлический прут таким образом, чтобы из под него можно было убрать нижний калориметр.

Нижний калориметр устанавливается на инфракрасную печь, основанием которой служит деревянный брусок. Конец прута должен оставаться полностью погруженным в холодную воду в течение всего эксперимента.

Поверхностный температурный датчик (термопара) должен быть плотно прижат к пруту. Расстояние между ближайшими к концам прута углублениями равно 31,5 см. Эти углубления используются для измерения разности температур на концах прута. Для улучшения теплопередачи между прутком и термопарами используется термопаста.

5. Нагревая спираль, довести воду в верхнем калориметре до кипения, и удерживать её при этой температуре. При кипении вода быстро испаряется, нагревательная спираль постепенно оголяется и в итоге может разрушиться. Чтобы избежать разрушения спирали, в калориметр необходимо доливать предварительно подогретую воду.

6. Взвесить заполненный водой калориметр и определить массу воды, результат записать в таблицу 11.3.

Воду в нижнем калориметре поддерживать при 0°C с помощью льда (в мешке из марли). Измерения можно начинать, когда установится постоянный температурный градиент между верхней и нижней термопарами, то есть процесс теплопередачи стабилизируется. В начале измерения удалить лед из нижнего калориметра. Измерять и делать записи изменения температуры между верхней и нижней термопарами, а также температуры воды в нижнем калориметре в течение 5 минут. Результаты измерений занести в табл. 11.3.

Таблица 11.3

Результаты измерений для определения коэффициента теплопроводности

m_B , кг											
t , с	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300
T , К	273										
Q , Дж	0										

Примечание. Порядок настройки измерителя температуры. Возможное количество подключаемых термопар 2–4. Вначале измеряется температура нижнего калориметра, затем разность температур между верхней и нижней термопарами.

8. Собрать экспериментальную установку согласно схеме на рис. 11.2. Напряжение на источнике постоянного напряжения до 6 В. Без подачи напряжения усилитель должен показывать 0, чтобы избежать ошибок в процессе измерений выходного напряжения.

9. Выбрать параметры настройки усилителя следующим образом: Вход: (Low Drift): 10^4 Ом, Установка постоянной времени (Time Const): 0.

10. Вывести реостат на максимум и, медленно уменьшая сопротивление в течение эксперимента, измерять силу тока и напряжения. Результаты занести в табл. 11.4.

Таблица 11.4

Результаты измерений силы тока и напряжения

I, A											
U, B											

Обработка результатов эксперимента

1. Используя результаты измерений по п.1 раздела «Порядок выполнения работы», вычислить теплоемкость калориметра по формуле (11.23). Удельную теплоёмкость воды принять равной $c_v = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

2. Используя данные табл. 11.2 и формулу (11.24), вычислить количество теплоты, передаваемой калориметру с водой окружающей средой за соответствующие табличным данным промежутки времени. Результаты вычислений занести в табл. 11.2.

3. По данным табл. 11.2. построить график зависимости от времени тепловой энергии, полученной калориметром с водой от окружающей среды. По наклону графика зависимости Q от t определить скорость передачи тепловой энергии от окружающей среды dQ_{cp}/dt .

4. Используя данные табл. 11.3 и формулу (11.24), вычислить количество теплоты, передаваемой калориметру с водой окружающей средой и металлическим прутком $Q_{пол}$ за соответствующие табличным данным промежутки времени. Результаты вычислений занести в табл. 11.3.

5. По данным табл. 11.3 построить график зависимости от времени тепловой энергии, полученной калориметром с водой от окружающей среды и металлического прута.. По наклону графика зависимости $Q_{\text{пол}}$ от t определить скорость передачи тепловой энергии $dQ_{\text{пол}}/dt$.

6. Используя полученные в п.п. 2 и 4 данного раздела числовые значения dQ_{cp}/dt и $dQ_{\text{пол}}/dt$, вычислить скорость передачи тепловой энергии от металлического прута по формуле:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ_{\text{пол}}}{dt} - \frac{dQ_{cp}}{dt}$$

7. По известной длине прута ($\Delta x = 31,5$ см) и известной площади поперечного сечения ($S = 4,91 \cdot 10^{-4}$ м²) из уравнения (11.19) вычислить коэффициент теплопроводности. По полученному из эксперимента среднему значению коэффициента теплопроводности и табличным значениям этого коэффициента ($\chi_{\text{Al}} = 220$ Вт/К · м, $\chi_{\text{Cu}} = 384$ Вт/К · м) определить абсолютные и относительные погрешности полученного экспериментально коэффициента теплопроводности.

8. По данным табл. 11.4 построить график зависимости силы тока от напряжения. По углу наклона графика определить сопротивление прута R .

9. Используя полученное числовое значение сопротивления прута и данные о его геометрических размерах ($l = 0,315$ м, $S = 4,91 \cdot 10^{-4}$ м²), вычислить коэффициент электропроводности по формуле (11.26).

10. По полученному из эксперимента среднему значению коэффициента электропроводности и табличным значениям этого коэффициента ($\sigma_{\text{Al}} = 3,27 \cdot 10^7$ (Ом·м)⁻¹, $\sigma_{\text{Cu}} = 5,33 \cdot 10^7$ (Ом·м)⁻¹) определить абсолютные и относительные погрешности полученного экспериментально коэффициента электропроводности.

11. Используя полученные экспериментально значения коэффициентов электропроводности и теплопроводности и подставив в уравнение (11.16) комнатное значение температуры T , найти экспериментальное значение числа Лоренца L .

12. Используя данные об абсолютных и относительных погрешностях коэффициентов электропроводности и теплопроводности, найти абсолютную и относительную погрешности числа Лоренца.

Библиографический список

а) основной:

1. *Савельев И.В.* Курс общей физики: В 5 кн. М.: Астрель: Изд-во АСТ, Кн. 2: Электричество и магнетизм. 2006. 336 с.
2. *Савельев И.В.* Курс общей физики: В 5 кн. М.: Астрель: Изд-во АСТ, Кн. 3: Молекулярная физика и термодинамика. 2007. 208 с.
3. *Капуткин Д.Е., Шустиков А.Г.* Физика. Обработка результатов измерений при выполнении лабораторных работ. Учеб. пособие. М.: МИСиС. 2007. 108 с.
4. *Батурин Б.Н.* Правила электробезопасности при выполнении лабораторных работ. Учебное пособие. М.: МИСиС. 1995. 38 с.

б) дополнительный:

5. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т.2. М.: Физматлит. 1979. 552 с.
6. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т.3. М.: Физматлит. 1983. 688 с.

Контрольные вопросы

1. Какое состояние системы называется равновесным?
2. Какие процессы называются явлениями переноса?
3. К каким явлениям относятся теплопроводность и электропроводность металлов?
4. На основе каких представлений об электронах создавалась классическая теория электропроводности металлов?
5. Сформулируйте закон Видемана-Франца.