

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования «Национальный исследовательский технологический университет  
«МИСИС»

---

**Дотдаев Альберт Шамилевич**

ЭЛЕКТРОННЫЙ ТРАНСПОРТ В СИСТЕМАХ  
С НЕТРИВИАЛЬНЫМ ТОПОЛОГИЧЕСКИМ ИНВАРИАНТОМ

Специальность 1.3.8 — «Физика конденсированного состояния»

Автореферат диссертации  
на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,  
Родионов Ярослав Игоревич

Москва — 2025

# Общая характеристика работы

Работа посвящена транспортным явлениям в системах, описываемых динамическими уравнениями, обладающими нетривиальным топологическим инвариантом. Так, уравнения движения одноэлектронных устройств во мнимом времени имеют инстантонные решения, характеризуемые целым индексом накрытия (число намоток); Вейлевские полуметаллы описываются Гамильтонианом, обладающим ненулевой кривизной Берри (топологическим числом Черна); уравнения движения для краевых состояний топологического изолятора имеют топологическую защищенность ввиду наличия дискретной симметрии по отношению к обращению времени. Во всех трех случаях симметрия уравнений движения играет фундаментальную роль и придает сходные черты описываемым физическим явлениям. Так, в случае кулоновской блокады конформная симметрия действия АЭШ дает инстантонные решения, ответственные за проявление кулоновской блокады в режиме сильной связи (большой безразмерный кондактанс туннельных контактов). В случаях Вейлевского полуметалла и топологического изолятора симметрия по отношению к обращению времени задает нетривиальные аналитические свойства волновых функций.

## Актуальность работы.

Транспорт в одноэлектронных устройствах за последние 40 лет стал классическим разделом теоретической и экспериментальной физики конденсированного состояния. Для теоретического исследования главная привлекательность этой области состоит в том, что с одной стороны, системы с кулоновской блокадой хорошо поддаются теоретическому описанию, а с другой стороны, это системы с сильным кулоновским взаимодействием, в которых вклад от взаимодействия принципиально не может быть описан теорией возмущений. С точки зрения эксперимента, все явления, описанные теорией, очень хорошо проявляют себя. Здесь наблюдается привлекательный симбиоз теории и экспериментальных наблюдений [1–5]. Транспортные свойства таких устройств очень чувствительны к внешним воздействиям, например, электрическим и магнитным полям, что обуславливает их практическое применение; на основе эффекта кулоновской блокады создают транзисторы, сверхчувствительные детекторы заряда, термометры[6]. В транспортных свойствах эффект кулоновской блокады проявляется как слабые (экспоненциально малые по  $g$ ) колебания проводимости ОЭТ с  $q = C_g U_g / e$ , [7]. Эта экспоненциальная малость может быть связана с тем фактом, что эти колебания производятся инстантонами — нетривиальными решениями уравнений движения действия АЭШ. С точки зрения теории поля, поиск инстантонов в неравновесной системе является старой нерешённой задачей. Сложность задачи проистекает из того факта, что неравновесие не позволяет использовать технику Мацубары, естественную для вычисления инстантонов. Единственным доступным инструментом является формализм Келдыша, который удваивает число степеней свободы и ещё больше усложняет уравнения движения.

Вейлевские полуметаллы [8–11] (ВПМ) [12–15] привлекают большой интерес в последние годы. Благодаря своему *релятивистскому* 3D-гамильтониану со скоростью Ферми, играющей роль скорости света, они демонстрируют интригующие транспортные

свойства, фазовые переходы, вызванные беспорядком [16, 17], необычные топологические явления, например, существование дуг Ферми (открытых в импульсном пространстве поверхностных состояний, соединяющих фермионы Вейля противоположной хиральности [18]), и, наконец, ярко выраженные явления типа КЭД, такие как хиральная аномалия [19–22]. В некоторой степени ВПМ по сути является твердотельной реализацией физики КЭД. Влияние анизотропии ненаклоненного конуса Вейля на транспортные свойства ВПМ с кулоновским беспорядком пока не изучалось теоретически. Отметим комплексную работу [23], в которой были рассмотрены (хотя в основном численно) эффекты химического потенциала и температуры на магнитосопротивление в изотропном ВПМ с кулоновским беспорядком. Также следует отметить исчерпывающее исследование магнитосопротивления изотропных ВПМ с  $\delta$ -коррелированным беспорядком [24]. Влияние сильного кулоновского беспорядка на поперечное магнитосопротивление было рассмотрено в статье [25]. Влияние анизотропии на транспорт ВПМ с дальним беспорядком без магнитного поля изучалось в работе [26].

Топологические изоляторы (ТИ) – это новые состояния квантовой материи, которые не могут быть адиабатически преобразованы в обычные изоляторы и полупроводники. Они характеризуются полной диэлектрической щелью в объеме и бесщелевыми состояниями, защищенными симметрией относительно обращения времени (TR - симметрией), на краю или поверхности. Возможные применения ТИ включают маломощную электронику [27] и устойчивые к ошибкам квантовые вычисления [28, 29]. Значительный интерес научного сообщества к свойствам ТИ обусловлен тем, что удаётся экспериментально наблюдать транспорт в краевых состояниях (в квантовых ямах HgTe) [30] и в поверхностных состояниях [31] (в кристаллах Bi<sub>2</sub>Se<sub>3</sub>).

**Целью данной работы** является аналитическое исследование влияния эффектов симметрии уравнений движения на транспортные свойства физических систем, обладающих указанными симметриями.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Получение инстантонов действия Амбегакара-Экерна-Шёна в общей стационарной неравновесной ситуации и доказательство инвариантности значения действия на этих инстантонах относительно функций распределения электронов на электродах и на островке;
2. Вычисление магнитосопротивления Вейлевских полуметаллов с аксиально-анизотропным неотклоненным конусом Вейля в ультраквантовом режиме для слабого беспорядка;
3. Аналитическое исследование рассеяния квазичастиц на краевых дефектах двумерного ТИ в однородном магнитном поле методами Покровского-Халатникова и теории возмущений;

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Найдено точное решение нелинейных уравнений движения для действия Амбегаокара-Экерна-Шёна в общей стационарной неравновесной ситуации. Произведен расчёт главной экспоненты в амплитуде кулоновских осцилляций кондактанса одноэлектронного транзистора.
2. Произведён расчёт поперечного магнитосопротивления вейлевского полуметалла с аксиальной анизотропией электронного спектра в формализме Кубо-Гринвуда. Выявлены функциональные зависимости магнитопроводимости от полярного и азимутального углов, определяющих направление оси анизотропии относительно приложенных магнитного и электрического полей.
3. Краевые дефекты в двумерных топологических изоляторах в поперечном однородном магнитном поле приводят к рассеянию электронов, распространяющихся по краевым состояниям. Произведен расчет коэффициента отражения для произвольной деформации края с предэкспоненциальной точностью. Коэффициент отражения обнаруживает квантовые осцилляции как функция магнитного поля в режиме слабых полей.

#### **Научная новизна:**

1. Впервые получены инстантоны в *неравновесном* режиме для одноэлектронного транзистора. Доказано, что значение действия на инстантонах не зависит от функций распределения электронов.
2. Впервые теоретически исследована зависимость магнитосопротивления от полярного и азимутального углов между осью анизотропии и плоскостью приложенного напряжения в вейлевских полуметаллах с аксиально-анизотропным *неотклоненным* конусом Вейля.
3. Впервые построена теория рассеяния краевых состояний в двумерных топологических изоляторах на краевых дефектах в присутствии магнитного поля.

**Практическая и теоретическая значимость** диссертации определяется следующими факторами.

Одноэлектронные устройства стали неотъемлемой частью теоретической и экспериментальной физики конденсированных сред[32, 33]. При низких температурах транспорт электронов через такие устройства затруднён кулоновской блокадой[1, 34–37] — явлением, которое остаётся мощным инструментом для наблюдения за взаимодействием и квантовыми эффектами. Транспортные свойства одноэлектронных устройств очень чувствительны к электрическим полям, что делает их полезными в электрометрии и для обеспечения стандартов тока/температуры/сопротивления, а также в других приложениях[38].

Недавние эксперименты, проведённые в Вейлевских полуметаллах в ультраквантовом режиме (при котором температура и химический потенциал намного меньше, чем

энергетический зазор между нулевым и первым уровнями Ландау (LL)), выявили ненасыщенное магнитосопротивление [39—42], линейное по магнитному полю  $H$  ( $\rho_{xx} \propto H$ ). Как таковое, это поведение кажется удивительным, поскольку обычные аргументы времени релаксации предсказывают насыщение магнитосопротивления в сильных магнитных полях. Фактические ВПМ являются высокоанизотропными соединениями. К счастью для теоретического анализа, некоторые из самых популярных из них, такие как  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  [12] или  $\text{Na}_3\text{Bi}$  [43], приблизительно аксиально анизотропны с похожими отношениями скоростей Ферми:  $\xi = v_{\perp}/v_{\parallel} \approx 4$  и ненаклоненными конусами Вейля. Анизотропия ВПМ с ненаклоненными конусами Вейля, как ожидается, окажет огромное влияние на экспериментальное изучение явлений переноса. Действительно, недавно пробудился активный экспериментальный интерес к последствиям анизотропии ВПМ с ненаклоненными конусами Вейля [42, 44, 45].

Электронный транспорт на краю топологического изолятора должен быть топологически защищён от рассеяния. Однако, как показано в экспериментальных работах, баллистический транспорт наблюдается только для образцов длиной не более чем около 1 мкм [30, 46]. Результаты экспериментов пробудили интерес научного сообщества к поиску возможных механизмов рассеяния. На краях реальных образцов топологических изоляторов всегда присутствуют геометрические дефекты. В данной работе показано, что в присутствии магнитного поля они приводят к рассеянию краевых состояний.

**Достоверность** изложенных в работе результатов обеспечивается следующими факторами.

Результаты, полученные относительно инстантонов в неравновесной Кулоновской блокаде, дополняются экспериментальными исследованиями [3, 47—49]. В транспортных свойствах эффект кулоновской блокады проявляется как слабые (экспоненциально малые по  $g$ ) колебания проводимости одноэлектронного транзистора с  $q = C_g U_g / e$ , [7]. Эта экспоненциальная малость может быть связана с тем фактом, что эти колебания производятся инстантонами.

Результаты, полученные относительно магнитосопротивления в анизотропных Вейлевских полуметаллах, согласуются с более ранней теоретической работой [50] в изотропном пределе. Кроме того, недавние эксперименты, проведенные в ультраквантовом режиме, выявили ненасыщенное магнитосопротивление [39—42], линейное по магнитному полю  $H$  ( $\rho_{xx} \propto H$ ).

Результаты, полученные относительно квазиклассического рассеяния краевых состояний в топологических изоляторах, были получены двумя теоретическими методами: методом Покровского-Халатникова и методом теории возмущений. Полученные коэффициенты отражения идеально согласованы.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на: 26-й ежегодной научной конференции ИТПЭ РАН (Москва, 2025 г.) и на семинарах ИТФ РАН (Москва, 2024-25 гг.)

Диссертационная работа была выполнена при поддержке грантов национального исследовательского технологического университета “МИСиС” К2-2022-025 и Фонда развития теоретической физики и математики “Базис” по гранту №22-1-1-24-1.

**Личный вклад.** Автор принимал активное участие в проведении аналитических расчётов, результаты которых представлены в основном тексте диссертации, и в подготовке текстов публикаций по теме диссертации.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 3 научных статьях, которые изданы в журналах, рекомендованных ВАК. Список публикаций автора приведён в конце автореферата.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и приложений. Полный объём диссертации 84 страницы текста с 18 рисунками. Список литературы содержит 109 наименований.

## Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемым проблемам, формулируется цель, ставятся задачи работы.

Первая глава посвящена получению инстантонов и диссипативного действия в одноэлектронном транзисторе для специальной реализации неравновесного режима и для общей реализации стационарного неравновесия.

В данной главе рассмотрен одноэлектронный транзистор (ОЭТ), Рис. 1, в режиме слабой Кулоновской блокады и параметрическом режиме, соответствующем подавлению когерентного поведения электронов. В таком случае система хорошо описывается действием Амбегаокара-Эккерн-Шена (АЭШ)[51], которое также называют диссипативным действием. Он состоит из островка (dot), соединенного с электродами (L,R) через туннельные контакты, характеризующиеся безразмерной проводимостью  $g_R$  ( $g_L$ ) для правого (левого) электрода. Островок также соединён с затворным электродом через переход с емкостью  $C_g$ .

В данной главе получены инстантоны действия АЭШ для одноэлектронного транзистора в общей стационарной неравновесной ситуации и показано, что значение действия на инстантонах не зависит от функций распределения электронов на электродах и на островке. Следовательно, главный показатель  $e^{iS}$ , вычисленный на конфигурации инстантонов, задается универсальным множителем  $e^{-g/2}$  (как и в равновесии), не зависящим от конкретной реализации неравновесного режима.

Гамильтониан для ОЭТ выглядит следующим образом:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_t + \hat{H}_{ch}. \quad (1)$$

Он состоит из Гамильтониана свободных электронов на островке и электродах  $\hat{H}_0$ , туннельного гамильтониана и зарядового гамильтониана. Полное действие для ОЭТ задается

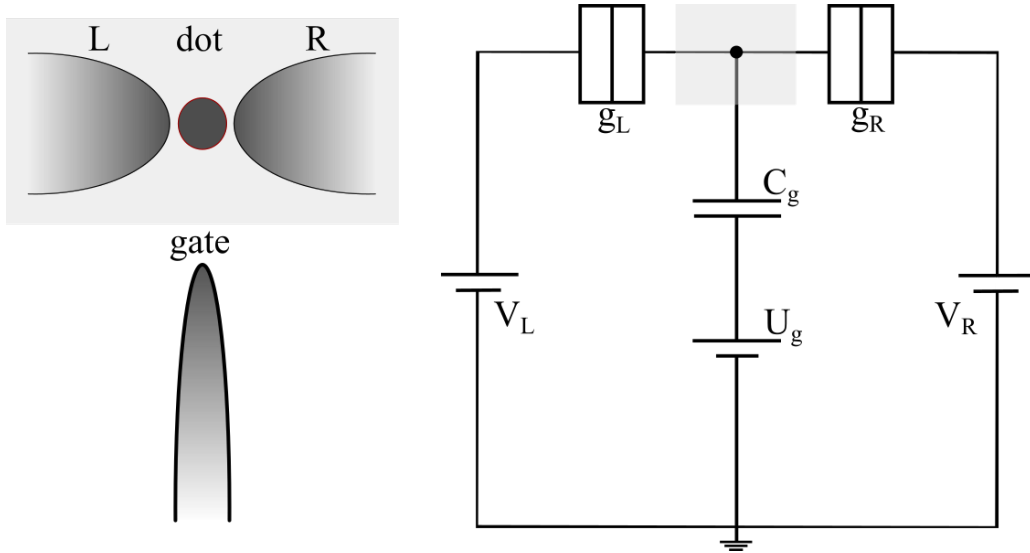


Рис. 1: Схематическое изображение одноэлектронного транзистора.

следующим интегралом по контуру Келдыша:

$$S = \int_K dt \left( i\hat{a}^\dagger \partial_t \hat{a} + i\hat{d}^\dagger \partial_t \hat{d} - \hat{H} \right), \quad (2)$$

где  $\hat{a}_k^{(\alpha)\dagger}(\hat{d}_m^\dagger)$  — оператор рождения электрона с энергией  $\varepsilon_k^{(\alpha)}(\varepsilon_m^{(d)})$  на выводе (островке). Интегрирование по фермионным полям  $a, d$  с последующим  $1/N_{\text{ch}}$  разложением числа каналов проводимости приводит к известному действию АЭШ:  $S = S_{\text{ch}} + S_d$ , где

$$S_{\text{ch}} = \int_K \left( \frac{\dot{\phi}^2(t)}{2E_{\text{ch}}} - q\dot{\phi}(t) \right) dt \quad (3)$$

— зарядовое действие, а

$$S_d = \frac{ig}{4} \iint dt dt' \bar{X}^T(t) \hat{\Pi}(t, t') X(t') \quad (4)$$

является диссипативной частью действия. Здесь  $g = g_L + g_R$  и  $\hat{\Pi}$  — поляризационный оператор. Полевые функции,

$$\bar{X}^T(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\chi_+(t)} & \frac{1}{\chi_-(t)} \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} \chi_+(t) \\ \chi_-(t) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\chi_{\pm}(t) = e^{-i\phi_{\pm}(t)}$$

являются векторами в пространстве Келдыша. Индекс  $\pm$  у  $\phi$  соответствует фазовому полю  $\phi(t)$  на верхней (нижней) ветви контура Келдыша[52].

В зависимости от размера островка ОЭТ, могут быть реализованы различные режимы неравновесия для электронов на островке. Режимы определяются двумя конкурирующими скоростями релаксации электронов:  $\tau_{\text{ee}}^{-1}$  (релаксация из-за электрон-электронного взаимодействия),  $\tau_E^{-1}$  (релаксация из-за туннелирования в резервуары). Отбрасывается возможное электрон-фононное взаимодействие, поскольку оно вымораживается при типично низких экспериментальных температурах. Для прозрачности были сформулированы две различные неравновесные ограничивающие ситуации. а) *квазиравновесный* режим,

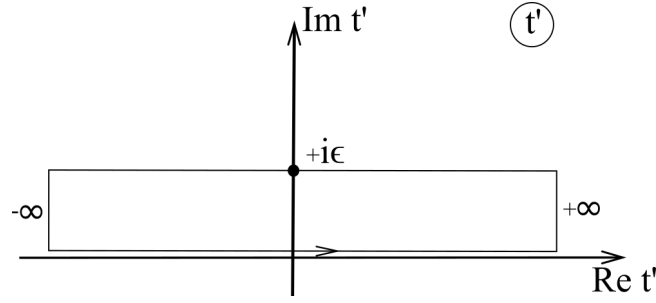


Рис. 2: Контур интегрирования в плоскости комплексного  $t'$ ;  $\epsilon$  — конечное положительное число, как и  $\pi - \epsilon$ .

когда е-е релаксация преобладает над релаксацией за счет туннелирования ( $\tau_{ee}^{-1} \gg \tau_E^{-1}$ ). В этом случае электроны термализуются до

$$T_d = \frac{g_L T_L + g_R T_R}{g}, \quad (6)$$

определяемой соответствующими температурами резервуаров б) *неравновесный* режим, когда термализация регулируется туннелированием. В последнем случае на острове устанавливается нефермиевская функция распределения электронов:

$$F^d = \frac{g_L}{g} F^L + \frac{g_R}{g} F^R. \quad (7)$$

В квазиравновесном случае равновесие нарушается конечной разностью температур электронов на электродах. Предполагается, что температуры электродов постоянны во времени. Затем электроны островка термализуются до стационарной неравновесной температуры (6).

Уравнения движения для этого конкретного случая:

$$\chi_{\pm} \frac{\delta S_d}{\delta \chi_{\pm}} = \frac{1}{2} \int (s_+ + s_-) \left( \frac{\chi_{\pm}}{\chi'_{\pm}} - \frac{\chi'_{\pm}}{\chi_{\pm}} \right) dt' + \int s_{\mp} \frac{\chi'_{\mp}}{\chi_{\pm}} dt' - \int s_{\mp} \frac{\chi_{\pm}}{\chi'_{\mp}} dt' = 0, \quad (8)$$

где ядро интегрального уравнения

$$s_{\pm}(t) \equiv \frac{g_R}{g} \frac{T_R}{\sinh(\pi T_R t \pm i0)} \frac{T_d}{\sinh(\pi T_d t \pm i0)} + \frac{g_L}{g} \frac{T_L}{\sinh(\pi T_L t \pm i0)} \frac{T_d}{\sinh(\pi T_d t \pm i0)}.$$

$\chi'_{\pm} \equiv \chi_{\pm}(t')$ ,  $\chi_{\pm} \equiv \chi_{\pm}(t)$ . Уравнения движения (8) являются нелинейными интегральными уравнениями с сингулярным ядром; общие подходы для таких уравнений не разработаны или, по меньшей мере, довольно сложны. Однако они были решены явно, с помощью удачных предположений об аналитических свойствах решений. Было предположено, что функция  $\chi^{-1}(t)$  имеет полюс при  $t = t_0$  (с действительным  $t_0$ ) и не имеет нулей или ветвей на действительной оси. Тогда  $\chi(t)$  аналитична в некоторой окрестности действительной оси, поэтому эффективно  $\chi_+(t) = \chi_-(t)$  для всех действительных  $t$ . Интегралы в уравнениях движения выражаются как контурные интегралы, взятые по контуру, показанному на Рис. 2, и могут быть вычислены через вычеты. Уравнения (8) затем сводятся к одному дифференциальному уравнению:

$$\frac{1}{\pi^2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\chi_{\pm}(t)} \right) = \frac{C_{-1}}{E_{\text{ch}}} s_{\pm}(t_0 - t), \quad (9)$$

где  $C_{-1}/E_{\text{ch}}$  — вычет  $1/\chi(t)$  в точке  $t_0$ . Отсюда траектория инстантона:

$$\frac{1}{\chi_{\pm}(t)} = C_{-1} \left( \frac{1}{E_{\text{ch}}} \int_{-\infty}^t dt' s_{\pm}(t_0 - t') + B \right). \quad (10)$$

Действие на этих инстантонах легко вычисляется (используя интегралы по контурам, как показано на Рис. 2), получаем:

$$S_0 = \frac{ig}{2}, \quad S_{\text{ch}} = \pi \left( \int_0^{\infty} \left[ s_{+}(t) + \frac{i}{\pi^2 t^2} \right] dt + B \right). \quad (11)$$

Здесь  $S_0$ ,  $S_{\text{ch}}$  — диссипативная и зарядовая части соответственно. Довольно удивительно, что диссипативная часть  $S_0$  такая же, как и в равновесии, несмотря на то, что система по сути неравновесна, а инстантоны и действие зависят от каждой из температур  $T_L$  и  $T_R$ . По этой причине было решено изучить систему в состоянии более общего стационарного неравновесия, когда электроны на острове и электродах имеют произвольные функции распределения электронов.

В случае стационарного обобщенного неравновесия распределение электронов описывается произвольными функциями. Компоненты поляризационного оператора зависят только от разности времени  $(t - t')$  (ввиду стационарности функций распределения). Уравнения движения в этом случае имеют вид

$$\int \Pi_{\pm\pm}(t' - t) \left( \frac{\chi_{\pm}}{\chi'_{\pm}} - \frac{\chi'_{\pm}}{\chi_{\pm}} \right) dt' + \int \Pi_{\mp\pm}(t' - t) \frac{\chi_{\pm}}{\chi'_{\mp}} dt' - \int \Pi_{\pm\mp}(t - t') \frac{\chi'_{\mp}}{\chi_{\pm}} dt' = 0. \quad (12)$$

Здесь  $\Pi_{++}$  и  $\Pi_{--}$ ,  $\Pi_{-+}$  и  $\Pi_{+-}$  — матричные поляризационного оператора.

Здесь важно: несмотря на то, что  $\hat{\Pi}$  состоит из функций распределения произвольной неравновесности, её разложение в ряд Лорана в окрестности  $t - t' = 0$  универсально и почти не зависит от функций распределения. Например, (наиболее важная) компонента Келдыша выглядит так:

$$\Pi^K(t) = -\frac{i}{2\pi^2} \left( \frac{1}{(t + i0)^2} + \frac{1}{(t - i0)^2} \right) + \Pi_{\text{reg}}(t), \quad (13)$$

где  $\Pi_{\text{reg}}(t)$  — функция, аналитическая на вещественной оси.

Уравнения движения теперь становятся:

$$\mp \frac{2i}{\pi^2} \frac{\dot{\chi}_{\pm}(t)}{\chi_{\pm}(t)} + \frac{2i}{\pi^2} \frac{C_{-1}}{E_{\text{ch}}} \frac{\chi_{\pm}(t)}{(t - t_0 \mp i0)^2} \pm \frac{i\mu_0}{\pi} \left( \frac{\chi_{\pm}(t)}{\chi_{\mp}(t)} + \frac{\chi_{\mp}(t)}{\chi_{\pm}(t)} \right) \pm 2\pi i \frac{C_{-1}}{E_{\text{ch}}} \chi_{\pm}(t) \Pi_{\text{reg}}(t_0 - t) = 0. \quad (14)$$

Их решениями являются:

$$\frac{1}{\chi_{\pm}(t)} = C_{-1} \left( \frac{1}{E_{\text{ch}}} \frac{1}{t - t_0 \mp i0} + \chi_{\text{reg}}(t - t_0) \right), \quad (15)$$

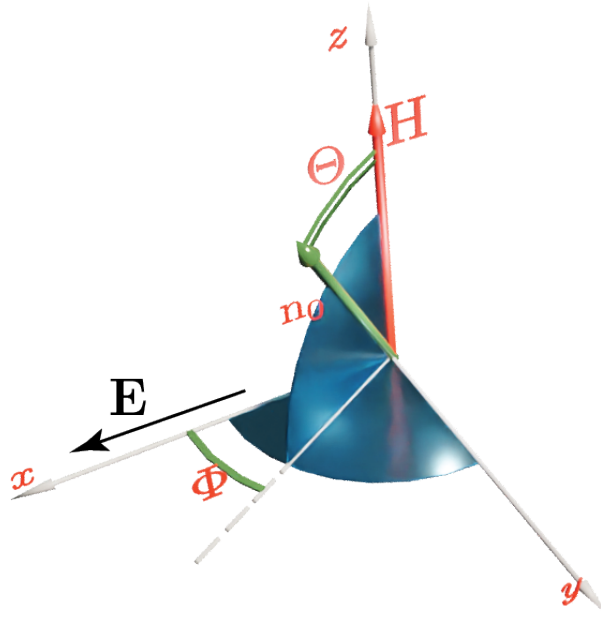


Рис. 3: Геометрия задачи. Ось анизотропии ( $\mathbf{n}_0$ ) наклонена на полярный угол  $\Theta$  и азимутальный угол  $\Phi$ . Напряжение приложено вдоль оси  $x$ .

где  $\chi_{\text{reg}}(t) = L\{\Pi_{\text{reg}}(t), \mu_0\} + B$  — функция, регулярная на действительной оси, зависящая от функций распределения электронов на контактах и острове;  $B$  — комплексный параметр, связанный условием, что  $\chi_{\pm}^{-1}(t)$  не имеет действительных нулей.

Значение диссипативного действия, рассчитанного на этих инстантонах, равно:

$$S_0 = \frac{ig}{2} \quad (16)$$

Подчеркивается, что диссипативное действие снова такое же, как и в равновесии. Таким образом, доказано, что значение седловой точки диссипативного действия одинаково для любой неравновесной системы (при условии, что функции распределения стационарны).

**Вторая глава** посвящена изучению влияния анизотропии на магнитосопротивление Вейлевских полуметаллов в сильном магнитном поле.

В этой главе вычисляется магнитопроводимость и магнитосопротивление Вейлевских полуметаллов (ВПМ) с аксиально-анизотропным неотклоненным конусом Вейля в ультраквантовом режиме для не очень больших концентраций примесей (слабый беспорядок). Получено магнитосопротивление как функция магнитного поля, а также полярного и азимутального углов оси анизотропии (см. Рис. 3 для геометрии). Анализировано масштабирование компонент тензора проводимости с параметром анизотропии  $\xi = v_{\parallel}/v_{\perp}$ .

Стандартный анизотропный Гамильтониан для электронов в потенциале кулоновского беспорядка имеет следующий вид:

$$H = H_0 + H_{\text{imp}},$$

$$H_0 = \sum_{i=\perp, \parallel} \int \psi^\dagger(\mathbf{r}) \sigma_i \left( v_i \left[ \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right]_i \right) \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (17)$$

$$H_{\text{imp}} = \int \psi^\dagger(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (18)$$

где  $H_0$  — анизотропный гамильтониан невзаимодействующих фермионов Вейля,  $\psi(\mathbf{r})$  и  $\psi^\dagger(\mathbf{r})$  — операторы уничтожения и рождения фермионов,  $\sigma_\parallel = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_0) \mathbf{n}_0$ ,  $\sigma_\perp = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{n}_0 (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_0)$ , — матрицы Паули,  $v_\parallel$  и  $v_\perp$  — скорости Ферми, а  $\mathbf{n}_0$  — единичный вектор, определяющий направление оси анизотропии (см. рис. 3). Член  $H_{\text{imp}}$  отвечает за взаимодействие электронов с кулоновскими примесями. В данной главе вычисляется поперечное магнитосопротивление, что означает — магнитное поле перпендикулярно плоскости, в которой производится измерение тока. Вводится переменная  $\Omega$ , связанная с магнитным полем (расстояние между нулевой и первой LL) и магнитной длиной  $l_H$

$$\Omega^2 = \frac{2eHv_\parallel}{c}, \quad l_H^2 = \frac{c}{eH}. \quad (19)$$

В первую очередь, с помощью анализа поляризационного оператора, выводится выражение для экранированного потенциала беспорядка. Экранированный потенциал беспорядка имеет вид

$$u(\mathbf{k}) = \frac{4\pi e^2}{\epsilon} \frac{1}{k^2 - \frac{4\pi e^2}{\epsilon} \Pi(k^2)}, \quad (20)$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость, а  $\Pi(k)$  — оператор поляризации газа Ферми, взятый в статическом пределе (частота установлена равной нулю):  $\Pi(k^2) \equiv \Pi(\omega, k^2)|_{\omega=0}$ . В ситуации обычной ферми-жидкости импульс, передаваемый статическим потенциалом беспорядка носителю заряда, намного меньше импульса Ферми  $k \ll k_F$ . Это влечет за собой возможность разложить  $\Pi(k^2)$  по  $k/k_F \ll 1$  в уравнении (20), оставив только первый член:  $\Pi(k) = \Pi(0) + k^2 \partial_{k^2} \Pi(0) + \dots$ , где  $\Pi(0) = -dn/d\mu$  — термодинамическая плотность состояний. Это приводит к стандартному статическому экранированию кулоновского взаимодействия. В данной задаче, роль импульса Ферми берет на себя обратная магнитная длина  $l_H^{-1}$ . Можно записать выражение для точного поляризационного оператора в следующей подходящей форме

$$\begin{aligned} \Pi(k^2) &= -\frac{dn}{d\mu} (1 + c_1 (kl_H)^2 + c_2 (kl_H)^4 + \dots) \\ &= -\frac{dn}{d\mu} [1 + k^2 l_H^2 f(k^2 l_H^2)], \end{aligned} \quad (21)$$

где  $f(0) \neq 0$  и  $f(x)$  — некоторая безразмерная функция, измеряющая отклонение поляризационного оператора от его значения при нулевом импульсе. При низких температурах

занят только нулевой уровень Ландау и  $dn/d\mu$  легко вычисляется (см., например, работу [53]), что дает  $dn/d\mu = (2\pi^2 v l_H^2)^{-1}$ . В результате получено следующее выражение для экранированного потенциала беспорядка:

$$u(\mathbf{k}) = \frac{4\pi e^2}{\epsilon} \frac{1}{k^2 [1 + \frac{2\alpha}{\pi} f(k^2 l_H^2)] + \frac{2\alpha}{\pi l_H^2}}, \quad (22)$$

где

$$\alpha = \frac{e^2}{\epsilon \hbar v_{\parallel}}, \quad (23)$$

так называемая постоянная тонкой структуры для ВПМ.

Как будет видно, основной вклад в проводимость, связанную с потенциалом беспорядка, вносит область импульсов  $k \lesssim l_H^{-1}$ , где  $l_H$  определено в уравнении (19). В результате, в отличие от теории ферми-жидкости, аргумент функции  $f$ , входящей в знаменатель уравнения (22), имеет порядок единицы. Следовательно, в данной задаче все выражение равно  $f(k^2 l_H^2) \sim \mathcal{O}(1)$ , при условии, что  $f(x)$  не имеет полюсов на вещественной оси при  $x \sim 1$ . Это действительно так, как можно вывести, например, из [54].

Однако, как хорошо известно, типичная ВПМ, например  $\text{Cd}_3\text{As}_2$ , имеет дополнительный малый параметр  $\alpha \ll 1$ , который для  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  равен  $\alpha \approx 0.05$  [12, 55]. Это радикально упрощает анализ. Учет точного  $\Pi(k^2)$  в кулоновском беспорядке (20) вместо  $\Pi(0)$  эквивалентен сохранению члена с функцией  $f$  в выражении (22). Однако, как видно из (22),  $f$  входит с малым префактором  $\alpha$  в перенормировку кулоновского поля. Таким образом, сохранение члена, содержащего  $f$  в кулоновском взаимодействии (22), дает малые (порядка  $\alpha$ ) поправки к наблюдаемым. В отличие от этого, в данной работе, сохраняются только члены порядка  $\mathcal{O}(\ln \alpha)$  и  $\mathcal{O}(1)$ . Поэтому  $\Pi(k^2)$  заменяется на  $\Pi(0)$  в потенциале беспорядка (20) и используется стандартное выражение Линдхарда для перенормированного кулоновского потенциала

$$u(\mathbf{k}) = \frac{4\pi e^2}{\epsilon} \frac{1}{k^2 + \kappa^2}, \quad (24)$$

где  $\kappa^2 = 2\alpha\pi^{-1}l_H^{-2} \ll l_H^{-2}$  — это квадрат обратной длины экранирования Дебая.

Прежде чем двигаться дальше, вполне уместно ввести перемасштабирование, которое делает спектр изотропным:

$$r_{\parallel} = r_{s,\parallel}, \quad r_{\perp} = \xi r_{s,\perp}, \quad \psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\xi} \psi_s(\mathbf{r}_s), \quad v_{\perp} = \xi v_{\parallel}. \quad (25)$$

Преобразование (25) делает часть гамильтониана без беспорядка изотропной

$$\begin{aligned} H_{s,0} &= -iv_{\parallel} \int \psi_s^{\dagger}(\mathbf{r}_s) \boldsymbol{\sigma} \left( \nabla_{\mathbf{r}_s} - i\frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \psi_s(\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}_s, \\ H'_{\text{imp}} &= \int \psi_s^{\dagger}(\mathbf{r}_s) u(\mathbf{r}_{s,\parallel} + \xi \mathbf{r}_{s,\perp}) \psi(\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}_s. \end{aligned} \quad (26)$$

Преобразование выполняется в три этапа. Сначала производится поворот системы координат так, чтобы новая ось  $z'$  стала параллельной оси анизотропии. Производится

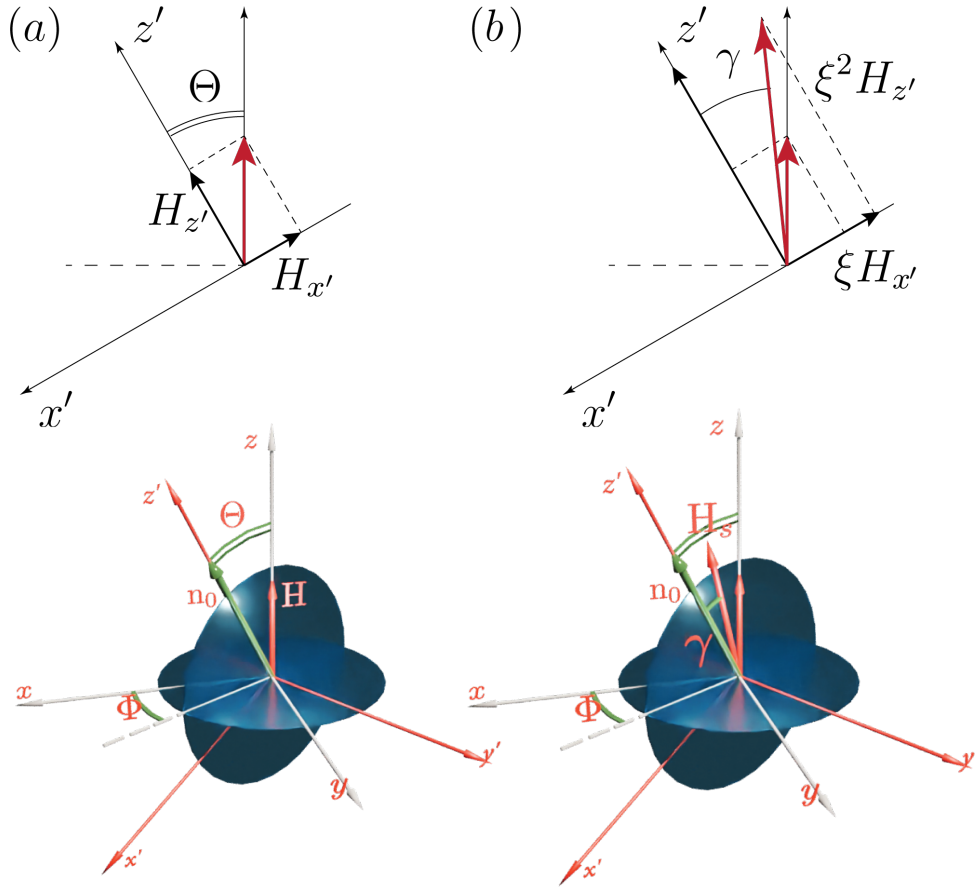


Рис. 4: (a) Повернутый базис  $x', y', z'$ . Ось  $z'$  ориентирована вдоль вектора анизотропии  $\mathbf{n}_0$ . (b) Положение масштабированного вектора магнитного поля  $\mathbf{H}_s$  после масштабирования. Мы видим, что он остается в плоскости  $z'y'$ , но повернут на угол  $\gamma$  вокруг оси  $y'$ .

поворот на угол  $\Phi$  вокруг оси  $z$ , а затем на угол  $\Theta$  вокруг преобразованной оси  $y$  (см. рис. 3).

$$\sigma = R\sigma'R^{-1}, \quad (27)$$

Во-вторых, выполняется перемасштабирование. Перемасштабированный тензор проводимости обозначается в повернутом базисе как  $\sigma'_s$ . Правило преобразования имеет вид

$$\sigma' = S_1\sigma'_s S^{-1}, \quad (28)$$

где  $S \equiv \mathbf{diag}(\xi^{-1}, \xi^{-1}, 1)$  и  $S_1 = \mathbf{diag}(\xi^{-1}, \xi^{-1}, \xi^{-2})$ .

Масштабное преобразование также изменяет компоненты вектора магнитного поля  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H}_s = H(-\xi \sin \Theta, 0, \xi^2 \cos \Theta). \quad (29)$$

Мы видим, что магнитное поле изменяется по закону

$$H_s = \xi\eta H, \quad \eta = \sqrt{\xi^2 \cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta}. \quad (30)$$

Важно отметить, что уравнение (29) также влечет за собой изменение угла наклона вектора относительно масштабированного базиса (хотя направление вектора, конечно, остается неизменным). Однако, чтобы подчеркнуть тот факт, что измеряемый угол изменяется, вектор  $\mathbf{H}_s$  изображен в несколько ином направлении на рис. 4 для наглядности). Как видно на рисунке, масштабированный вектор магнитного поля наклонен на угол

$$\gamma = -\arctan\left(\frac{1}{\xi} \tan \Theta\right) \quad (31)$$

в повернутой плоскости  $(x'z')$  относительно оси  $z'$ . Для упрощения расчета проводимости необходимо перейти в систему координат, в которой ось  $z$  направлена вдоль вектора магнитного поля. Поэтому необходимо выполнить обратный поворот на угол  $\gamma$  в плоскости  $(x'z')$  (соответствующую матрицу поворота обозначим как  $R_\gamma$ ). Обозначим новый тензор проводимости в еще раз повернутом базисе как  $\sigma'_s$

$$\sigma_s = R_\gamma \sigma'_s R_\gamma^{-1}, \quad (32)$$

где матрица  $R_\gamma$  идентична матрице поворота  $R$  с точностью до замены  $\Theta \rightarrow \gamma$ ,  $\Phi \rightarrow 0$ . В результате исходный тензор проводимости и перемасштабированный, и повернутый тензор связаны следующим преобразованием

$$\sigma = RS_1 R_\gamma \sigma'_s R_\gamma^{-1} S^{-1} R^{-1}. \quad (33)$$

Это приводит к следующему окончательному выражению для связи компонент тензора проводимости в повернутом перемасштабированном базисе и исходном

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{\xi^2} [\eta^2 \sigma'_{s,xx} \cos^2 \Phi + \xi^2 \sigma'_{s,yy} \sin^2 \Phi], \quad (34)$$

где  $\eta$  определено в уравнении (30).

Ось анизотропии теперь наклонена на полярный угол  $\gamma$  в плоскости  $(x'z')$ . Последнее означает, что азимутальный угол оси равен нулю. Компоненты тензора проводимости, в общем случае, должны зависеть от углов Эйлера.

Перемасштабированная плотность частиц связана с исходной через преобразование:  $n_s = \xi^2 n$ . В результате дебаевское экранирование определяется как

$$\kappa^2 = \frac{1}{\xi^2} \frac{dn_s(H_s)}{d\mu} \equiv \frac{1}{\xi^2} \frac{2\alpha}{\pi l_{H_s}^2}, \quad (35)$$

где  $l_{H_s} = c/eH_s \equiv c/(eH\xi\eta)$  — магнитная длина в перемасштабированной системе координат. Кроме того, перемасштабированный потенциал беспорядка приводит к модифицированной функции корреляции беспорядка, определяемой стандартным выражением метода диаграмм беспорядка  $g(\mathbf{p}) = n_{\text{imp}} |u(\mathbf{p})|^2$

$$g(\mathbf{p}) = \frac{16\pi^2 n_{\text{imp}} \xi^2 \alpha^2 v_{\parallel}^2}{(\xi^2 p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2 + \xi^2 \kappa^2)^2}. \quad (36)$$

Для вычисления проводимости был использован формализм Кубо. Формула Кубо в данной задаче имеет вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} = & 2e^2 v_{\parallel}^2 \int \frac{d\varepsilon d\mathbf{p} dx'}{(2\pi)^3} \frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon} \text{Tr} \left[ \langle \text{Im} G_{11}^R(x, x'; \varepsilon, \mathbf{p}) \text{Im} G_{22}^R(x', x; \varepsilon, \mathbf{p}) \rangle \right. \\ & + \langle \text{Im} G_{22}^R(x, x'; \varepsilon, \mathbf{p}) \text{Im} G_{11}^R(x, x'; \varepsilon, \mathbf{p}) \rangle \\ & - \frac{1}{4} \langle [G_{12}^R(x, x'; \varepsilon, \mathbf{p}) - G_{12}^A(x, x'; \varepsilon, \mathbf{p})] [G_{12}^R(x', x; \varepsilon, \mathbf{p}) - G_{12}^A(x', x; \varepsilon, \mathbf{p})] \rangle \\ & \left. - \frac{1}{4} \langle [G_{21}^R(x, x'; \varepsilon, \mathbf{p}) - G_{21}^A(x, x'; \varepsilon, \mathbf{p})] [G_{21}^R(x', x; \varepsilon, \mathbf{p}) - G_{21}^A(x', x; \varepsilon, \mathbf{p})] \rangle \right].\end{aligned}\quad (37)$$

Здесь угловые скобки обозначают усреднение беспорядка, а  $f(\varepsilon)$  — функция распределения Ферми. Последние две строки в уравнении (37) (обычно отсутствующие в стандартном анализе) появляются из-за поправок на вершины беспорядка и, как можно увидеть ниже, не исчезают только в анизотропном случае. Функции Грина, входящие в (37), определяются следующим образом

$$\begin{aligned}G^R(x, x'; \varepsilon, \mathbf{p}) &= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(x_{p_y}) G_n^R(\varepsilon, \mathbf{p}_n) S_n^\dagger(x'_{p_y}), \\ S_n(s) &= \begin{pmatrix} \chi_n(s) & 0 \\ 0 & \chi_{n-1}(s) \end{pmatrix}, \\ G_n^R(\varepsilon, p_z) &= \frac{\varepsilon + v\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_n}{(\varepsilon + i0)^2 - \varepsilon_n^2}, \\ x_{p_y} &= x - p_y l_H^2.\end{aligned}\quad (38)$$

Здесь  $\chi_n(s)$  — нормированная волновая функция осциллятора  $n$ -го состояния, а

$$\mathbf{p}_n = (0, \sqrt{2n}/l_H, p_z) \quad (39)$$

— эффективный двумерный импульс.

В ультраквантовом пределе ( $T \rightarrow 0$ ) производная функции Ферми может быть заменена функцией  $\delta$ ,  $\partial f(\varepsilon) = -\delta(\varepsilon - \mu)$ , и интегрирование по энергии может быть выполнено явно. Нас будет интересовать предел малого химического потенциала,  $\mu \ll \Omega$ . В результате отбрасывается  $\mu$  в дальнейшем вычислении  $\sigma_{xx}$  (но он сохраняется для вычисления  $\sigma_{xy}$ , чтобы получить не исчезающий результат). Как и в исследовании Абрикосова [50], только нулевой и первый уровни Ландау вносят вклад в проводимость.

Чистая система отображается на изотропную (уравнение 26), и результат для проводимости должен совпадать с результатом Абрикосова. Поэтому мы немедленно восстанавливаем исчезающую проводимость в нулевом порядке по степени беспорядка. Качественно это можно объяснить перпендикулярным к электрическому полю дрейфом электронных орбит. Таким образом, электронам необходимо рассеяние, чтобы дрейфовать в коллинеарном к электрическому полю направлении. Поэтому нужно суммировать диаграммы, показанные на рис. 5.

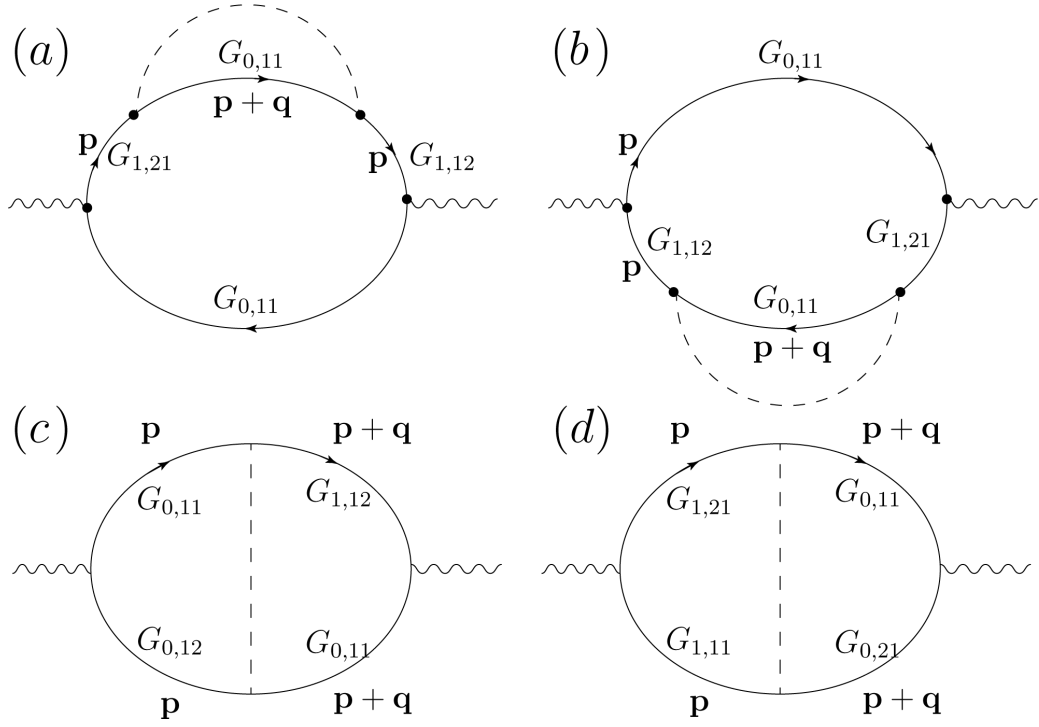


Рис. 5: Вклады первого порядка в проводимость  $\sigma_{xx}$ .

В главном логарифмическом приближении (точность расчета Абрикосова [50]) проводимость  $\sigma_{xx}$  имеет вид

$$\sigma_{xx} = \frac{\alpha^3}{\Omega^2} v_{\parallel}^3 n_{\text{imp}} [\cos^2 \Theta + \xi^{-2} \sin^2 \Theta] \ln \frac{1}{\alpha}. \quad (40)$$

Как видно, анизотропия проявляется в зависимости  $\Theta$  уравнения (40). При  $\xi = 1$  зависимость  $\Theta$  пропадает, и уравнение (40) воспроизводит известный результат Абрикосова для изотропного ВПМ [50]. Однако проводимость (40) все еще не демонстрирует зависимость  $\Phi$ . Это связано с недостаточной точностью логарифмического приближения. В данной главе этот результат был улучшен более точным вычислением соответствующих интегралов. в итоге было получено следующее выражение:

$$\sigma_{xx} = \frac{\alpha^3}{2\pi\Omega^2} v_{\parallel}^3 n_{\text{imp}} [\cos^2 \Theta + \xi^{-2} \sin^2 \Theta] \times \left[ \ln \frac{4\pi\xi^2}{\alpha e^C (\xi + \eta)^2} - 2 \frac{\xi \cos^2 \Phi + \eta \sin^2 \Phi}{\xi + \eta} \right], \quad (41)$$

где  $\eta$  определено в Ур. (30), а  $C$  — константа Эйлера–Маскерони.

Выражение (41) представляет собой  $\alpha$ -разложение интегралов, входящих в формулу Кубо (37), где усреднение беспорядка выполняется с корреляционной функцией (36). Опущенные члены при вычислении интегралов, входящих в выражение Кубо (37), имеют порядок  $\mathcal{O}(\alpha \ln \alpha)$ . Именно с такой точностью вычисляется оператор поляризации в кулоновском потенциале (24), и это делает весь вывод самосогласованным. Графики с зависимостью магнитопроводимости от  $\Theta$  и  $\Phi$  представлены на рис. 6 и 7.

Выражение для магнитосопротивления выглядит так:

$$\rho_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}. \quad (42)$$

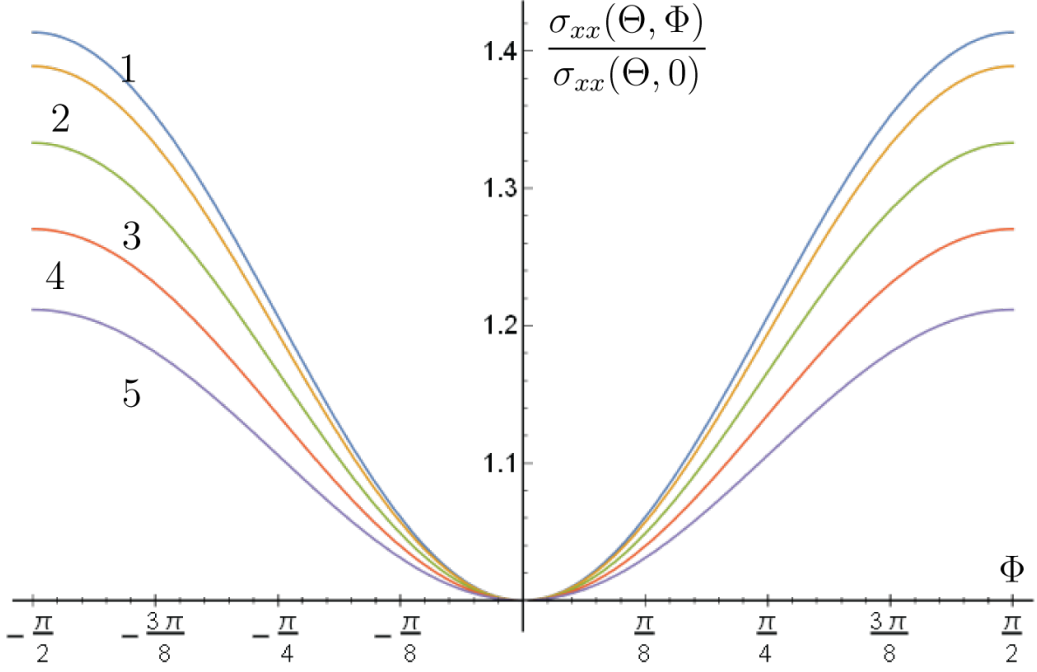


Рис. 6: Зависимость  $\Phi$  проводимости  $\sigma_{xx}$  при различных значениях полярного угла  $\Theta$ . Здесь  $\Theta$  уменьшается с шагом  $\pi/24$  (см. кривые с 1 по 5);  $\Theta_n = \frac{\pi}{2} - (n-1)\frac{\pi}{24}$ . Графики построены при реалистичных значениях  $\xi = 4$  ( $\text{Cd}_2\text{As}_3$ ) и постоянной тонкой структуры  $\alpha = 0,05$ .

Два члена, входящих в знаменатель уравнения (42), не одного порядка:  $\sigma_{xx}$  пропорционален силе беспорядка, в то время как первый член в разложении беспорядка  $\sigma_{xy}$  не зависит от беспорядка. Как будет видно далее, для не очень высококомпенсированных ВПМ (см. точное условие ниже) условие  $\sigma_{xx} \ll \sigma_{xy}$  всегда выполняется. Для вычисления магнитосопротивления была вычислена также компонента  $\sigma_{xy}$  тензора проводимости, или проводимость Холла.

Проводимость Холла включает аномальный и нормальный вклады. Полная проводимость не зависит от беспорядка в низшем порядке теории возмущений [24, 50]. Выражение, связывающее проводимость Холла в исходном и повернутом и перемасштабированном базисах, следует из уравнения (33) и имеет вид

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{\xi} \sigma'_{xy,sc} \sqrt{\xi^2 \cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta}. \quad (43)$$

Выражение для проводимости Холла в ультраквантовом пределе в изотропной системе можно взять, например, из статьи [50]. Получается:

$$\sigma_{xy} = \sqrt{\cos^2 \Theta + \xi^{-2} \sin^2 \Theta} \frac{\alpha \mu}{4\pi^2}. \quad (44)$$

Необходимо выразить холловскую проводимость (44) через плотность носителей заряда. В масштабированном повернутом базисе она задается стандартным выражением [50]:  $n_s = \Omega_s^2 \mu / (4\pi^2 v_{\parallel})$ , где  $\Omega_s^2 = 2eH_s v_{\parallel} / c$  — магнитное поле в масштабированном базисе координат.

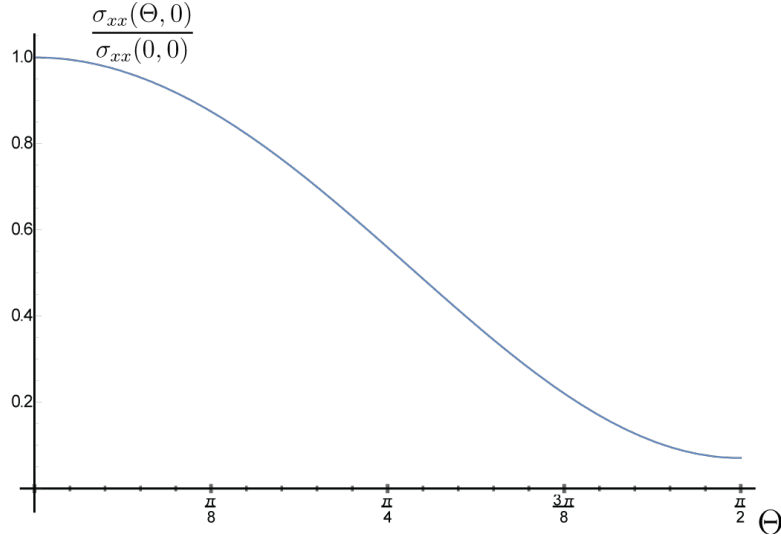


Рис. 7: Зависимость  $\Theta$  проводимости  $\sigma_{xx}$  при  $\Phi = 0$ .

С использованием соотношения между магнитными полями (30), получено следующее соотношение для плотности носителей заряда:

$$n_0 = \frac{\Omega^2 \mu}{4\pi^2 v_{\parallel}} \sqrt{\cos^2 \Theta + \xi^{-2} \sin^2 \Theta}. \quad (45)$$

Видно, что условие  $\sigma_{xx} \ll \sigma_{xy}$  выполняется до тех пор, пока  $\alpha^2 n_{\text{imp}} \ll n_0$ . В типичной ситуации условие электронейтральности влечёт за собой  $n_{\text{imp}} \sim n_0$ , поэтому  $\sigma_{xx} \ll \sigma_{xy}$  всегда выполняется.

С использованием выражений (45) в (44) и (42), получен следующий результат для магнитосопротивления:

$$\rho_{xx} = \frac{\Omega^2 n_{\text{imp}} v_{\parallel}}{n_0^2} [\cos^2 \Theta + \xi^{-2} \sin^2 \Theta] \times \left[ \ln \frac{4\pi \xi^2}{\alpha e^C (\xi + \eta)^2} - 2 \frac{\xi \cos^2 \Phi + \eta \sin^2 \Phi}{\xi + \eta} \right]. \quad (46)$$

Видно, что анизотропия четко выражена в реалистичной ВПМ, где (как в  $\text{Cd}_3\text{As}_2$ ,  $\xi^2 \approx 16 \gg 1$ ). Если ось анизотропии ориентирована перпендикулярно магнитному полю  $\mathbf{H}$ , отношение сопротивлений масштабируется как  $\xi^2$

$$\frac{\rho_{xx}(\mathbf{H} \parallel \mathbf{n}_0)}{\rho_{xx}(\mathbf{H} \perp \mathbf{n}_0)} = \xi^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln \alpha}\right). \quad (47)$$

Выражения (41), (46) и (47) являются основными результатами данной главы.

Весьма интересно еще раз отметить, что зависимость сопротивления от азимутального угла  $\Phi$  проявляется в сублидирующем к основному логарифмическому члену. Таково следствие усреднения по дальнему кулоновскому беспорядку.

**Третья глава** посвящена исследованию квазиклассического рассеяния в топологических изоляторах в магнитном поле.

В данной главе построена теория рассеяния в такой системе для широких классов профилей деформации края. Особое внимание уделяется аналитической структуре решений соответствующего уравнения Дирака. Были изучены два взаимодополняющих

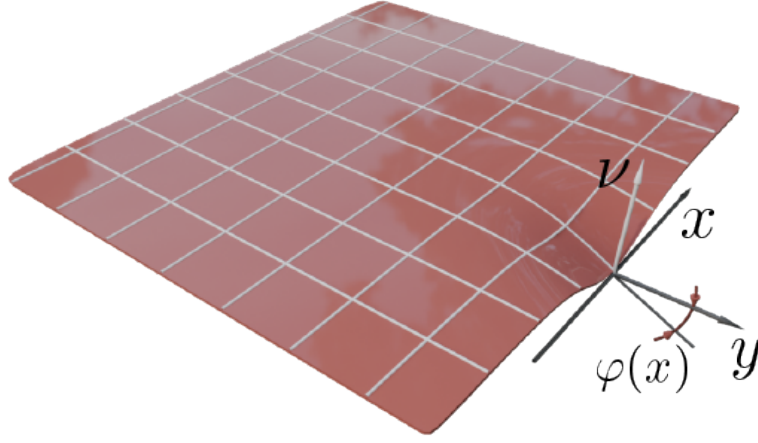


Рис. 8: Схематическая иллюстрация геометрического дефекта края в образце двумерного топологического изолятора

случая: квазиклассический режим, соответствующий гладкой деформации края, а также режим теории возмущений по малому внешнему магнитному полю. В тех ситуациях, когда параметры задачи допускают применение обоих этих подходов, продемонстрировано совпадение полученных ответов. В использованном подходе краевой дефект описывается профилем угла деформации (см. рис. 8). Упругое рассеяние становится возможным при наличии однородного магнитного поля, ортогонального кромке. В проведённом исследовании проливается свет на то, как TR - симметрия влияет на аналитические свойства амплитуды рассеяния: в отсутствие магнитного поля удаётся найти точное решение для любого профиля деформационного потенциала; для гладких профилей деформации используется метод Покровского-Халатникова [56], позволяющий получить аналитическое выражение для амплитуды отражения с предэкспоненциальной точностью.

В данной главе использована модель, в которой предполагается следующая форма Гамильтониана для электронов в двумерном ТИ:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= H_0 + H_{so}; \\ H_0 &= v_{F0}\hat{p}_x\hat{\sigma}_y, \quad H_{so} = \alpha\vec{\sigma} \times \vec{p} \cdot \vec{\nu},\end{aligned}\tag{48}$$

где  $H_0$  — эффективный гамильтониан краевых состояний, движущихся вдоль оси  $x$  ( $y = 0$ ) [57] и  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  — матрицы Паули, действующие в базисе спина  $1/2$ .  $H_0$  следует из особой зонной структуры, не зависящей от спин-орбитального взаимодействия, а  $v_{F0}$  представляет собой затравочную скорость Ферми. Спин-орбитальный гамильтониан  $H_{so}$  написан стандартным образом для двумерного электронного газа [58];  $\vec{p}$  — импульс электронов,  $\nu$  — единичный вектор, перпендикулярный поверхности (или границе раздела в гетероструктуре),  $\alpha$  — параметр Рашбы, зависящий от материала и внешнего электрического поля (затворного напряжения) [59, 60]. Последнее вызывает расщепление энергетических зон из-за спина электрона (расщепление Рашбы), что хорошо видно в зонной структуре ТИ-материалов [60, 61].

Деформацию края, как например, представленная на рис. 8, приводит к модификации спин-орбитального взаимодействия

$$\begin{aligned} H_{so} &= -\alpha \hat{p}_x \hat{\sigma}_y + \hat{U}(x); \\ \hat{U}(x) &= \frac{\alpha}{2} [\hat{p}_x \phi(x) + \phi(x) \hat{p}_x] \sigma_z \end{aligned} \quad (49)$$

для гладких и неглубоких деформаций ( $\phi(x) \ll 1$ ). Здесь  $\phi(x)$  определяет профиль изгиба образца в плоскости  $yz$  и введён антикоммутатор для сохранения эрмитовости исходного гамильтониана СОВ (48). После перенормировки скорости Ферми и добавления магнитного поля, перпендикулярного плоскости образца топологического изолятора, Гамильтониан 48 принимает вид:

$$\hat{H}^{1D}(x) = v_F \hat{p}_x \sigma_y + \mu \sigma_z + \hat{U}(x), \quad (50)$$

где  $v_F = v_{F0} - \alpha$  — перенормированная скорость Ферми, а  $\mu = \mu_B g \mathcal{H}$ ,  $g$  — g-фактор для краевых электронов [62]. Поперечное магнитное поле приложено ввиду того, что магнитное поле в плоскости не влияет на краевые состояния, поскольку соответствующий член в гамильтониане можно исключить калибровочным преобразованием операторов электронного поля [63]. Таким образом, была поставлена задача рассеяния для следующего уравнения Дирака:

$$\left[ v_F \hat{p}_x \sigma_y + \mu \sigma_z + \hat{U}(x) \right] \psi(x) = \varepsilon \psi(x) \quad (51)$$

Легко видеть, что даже в отсутствие деформационного потенциала  $\hat{U}(x)$  зеемановский член  $\mu \sigma_z$  открывает щель в спектре краевого состояния ширины  $\mu$ . Поэтому состояния рассеяния всегда имеют энергию больше  $\mu$  и условие  $\varepsilon > \mu$  предполагается всегда выполненным.

Уравнение Дирака (51) представляет собой систему двух дифференциальных уравнений первого порядка на дублет  $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ . Это уравнение было сведено к дифференциальному уравнению 2-го порядка относительно единственной функции  $\psi_1$ :

$$2\hbar^2(\varphi^2 + 1)\alpha\psi_1'' + 2i\hbar[\hbar^2(\varphi^2 + 1)\varphi'' + \varphi\alpha(2\mu - 3i\hbar\varphi')]\psi_1' + \left[ \frac{1}{2}\alpha\beta(\alpha - 2i\hbar\varphi') + 4\varepsilon\hbar^2\varphi\varphi'' \right] \psi_1 = 0, \quad (52)$$

$$\psi_2 = \frac{2\hbar(\varphi^2 + 1)\psi_1' - i\psi_1\varphi\beta(x)}{\alpha(x)}, \quad (53)$$

где  $\alpha(x) = 2(\mu + \varepsilon) - i\hbar\varphi'$ ,  $\beta(x) = 2(\mu - \varepsilon) + i\hbar\varphi'$ . Поскольку дифференциальное уравнение (52) не может быть решено точно, оно было проанализировано в двух различных подходах: (i) квазиклассический метод, отвечающий плавной деформации  $\varphi(x)$  ребра; (ii) теория возмущений по напряженности магнитного поля (зеемановской энергии)  $\mu$ . Исследование уравнения (51) в квазиклассической парадигме требует указания малого параметра задачи. Физически, квазиклассический подход предполагает гладкость потенциальной системы.

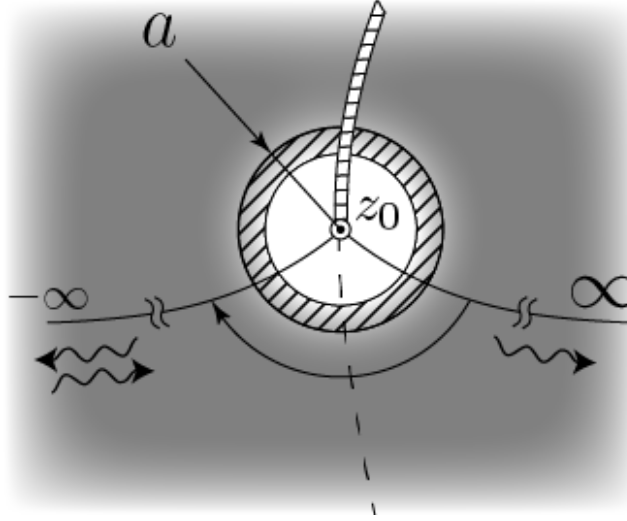


Рис. 9: К методу Покровского-Халатникова. Окрестность точки поворота  $z_0$  со стандартным разрезом, идущим вверх. Серая область обозначает область применимости квазиклассического приближения (достигающую бесконечности в комплексной плоскости). Меньший круг радиуса  $a$  обозначает область применимости точного решения вблизи точки поворота. Две сплошные кривые, исходящие из точки поворота до  $\pm\infty$ , являются антистоксовыми линиями. Пунктирная линия — линия Стокса. Заштрихованная область — это область сосуществования квазиклассического и точного решений, в которых их можно сшить.

Роль потенциала играет профиль краевой деформации  $\varphi(x)$ . Соответствующий масштаб изменения потенциала обозначен  $a$ . Следовательно, гладкость потенциала означает, что дебройлевская длина волны  $\hbar v_F/\varepsilon$  намного меньше  $a$ :

$$\frac{\lambda}{a} \equiv \frac{\hbar v_F}{\varepsilon a} \ll 1 \quad (\text{условие квазиклассичности}) \quad (54)$$

Как показано ходе анализа, структура квазиклассического рассеяния в задаче такова, что ввиду условия  $\varepsilon > \mu$  квазиклассический импульс никогда не обращается в нуль на вещественной оси, что делает рассеяние всегда *надбарьерным* событием. Наиболее адекватным подходом к решению задачи о надбарьерном отражении является метод Покровского-Халатникова (П-Х) [56, 64].

Для получения квазиклассического решения вводится экспоненциальная замена  $\psi \rightarrow e^{iS/\hbar}$  для волновой функции и используется стандартный квазиклассический аппарат, адаптированный к стационарному уравнению Дирака:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \psi_{1,2} = \exp \left( \frac{iS_0}{\hbar} + iS_{1,2} + \dots \right), \quad (55)$$

В нулевом порядке по  $\hbar$  (или отбрасывая все члены с производными от  $\varphi$  в уравнении 52) получаем следующее выражение для  $S_0$ :

$$S_0(x) = \int^x q_{\pm}(x') dx', \quad (56)$$

$$q_{\pm} = \frac{-\mu\varphi \pm p}{\varphi^2 + 1}, \quad p = \sqrt{\varepsilon^2(\varphi^2 + 1) - \mu^2} \quad (57)$$

где  $q_{\pm}$  интерпретируется как квазиклассический импульс. Затем, с сохранением членов порядка  $\hbar$  ( $S_{1,2}$  в замене (55)) и подставив её в (52), получены предэкспоненциальные квазиклассические члены для волновой функции  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \psi_{1,\pm}(x) &= \xi_{1,\pm}(x) e^{\frac{i}{\hbar} \int q_{\pm} dx} \quad \xi_{1,\pm} = \sqrt{\pm q_{\pm} \left[ 1 \pm \frac{\varphi \varepsilon}{p} \right]} \\ \psi_{2,\pm}(x) &= -i \psi_{1,\pm} \frac{\varepsilon \varphi \mp p}{\varepsilon + \mu} \end{aligned} \quad (58)$$

Далее, найдены точки, в которых квазиклассичность решения нарушается. Обычно это точки ветвления квазиклассического момента  $q_{\pm}$  (57). Эти точки на самом деле являются возможными особыми точками исходного дифференциального уравнения. Точки ветвления  $p$ , которые одновременно являются и точками ветвления  $q_{\pm}$ :

$$\varphi(z_{\pm}) \equiv \varphi_{\pm} = \pm i \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{\varepsilon^2}} \quad (59)$$

$$\varphi(z) = \varphi_{\pm} + (z - z_{\pm})/a + \dots \quad (60)$$

и квазиклассические импульсы, соответствующие различным линейным независимым решениям совпадают. Предполагается, что точки ветвления имеют простейшую структуру, то есть являются корнями первого порядка  $p^2(z)$ . Соответствующая точка ветвления всегда находится вне действительной оси ввиду условия  $\varepsilon > \mu$  (см. выражение (54)).

После разложения потенциала  $\varphi(z)$  в окрестности точек  $z_{\pm}$ , (уравнение 60), получается квазиклассическое условие (54) в виде  $\varepsilon \hbar^2 v_F^2 / [(\varepsilon^2 - \mu^2)^{3/2} |a| |z - z_{\pm}|] \ll 1$ , которое нарушается в точках  $z \rightarrow z_{\pm}$ . Поэтому точки  $z_{\pm}$  были включены в реализацию метода П-Х. Кроме того, условие квазиклассичности нарушается в окрестности нулей  $q_{\pm}$  (точек поворота), обозначенных  $z_p$ . Им соответствуют сингулярности профильной функции  $\varphi(z)$ . Предполагается самый простой, но наиболее распространенный тип особенности – простой полюс:

$$\varphi(z) = \frac{ia}{z - z_p} + \dots \quad (61)$$

Поэтому  $z_p$  также включена в процедуру П-Х.

Аналитическая структура  $\varphi(z)$  распадается на два общих класса: функция, имеющая особенности в конечных точках комплексной плоскости (типичным примером могут служить лоренцевы потенциалы), и функция, не имеющая особенностей в конечных точках комплексной плоскости (например, потенциалы гауссова типа). В последнем случае

уместно следующее замечание. Поскольку  $\varphi(x) \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow \pm\infty$ , последний класс соответствует ситуации, когда  $\varphi(z)$  имеет существенную особенность в точке  $z \rightarrow \infty$ . Типичным примером может быть  $\varphi(z) = P_n(z/a)e^{-z^2/a^2}$ , где  $P_n(z/a)$  — многочлен порядка из  $n$ . Приведенный анализ, таким образом, разделен на два случая: (i) Случай потенциала, регулярного в любой конечной точке. (ii) Случай потенциала, имеющего особенности в конечных точках, когда тип особенностей ограничен простыми полюсами.

Случай регулярного потенциала соответствует классической обработке П-Х, адаптированной к более сложному уравнению Дирака. Для этого произведено преобразование уравнения Дирака к уравнению типа Шрёдингера:

$$\begin{aligned} \psi''(x) + \eta(x)\psi'(x) + \kappa(x)\psi(x) &= 0 \Rightarrow \\ \theta''(x) + \pi^2(x)\theta(x) &= 0 \quad (\text{уравнение Шрёдингера}) \end{aligned} \quad (62)$$

$$(63)$$

Далее, вычисляется точное решение вблизи точки поворота  $p$ . Уравнение (62) сводится вблизи точки ветвления  $z_+$  к классическому уравнению Эйри:

$$\theta''(s) + s\theta(s) = 0, \quad s = \gamma^{1/3}\zeta, \quad \gamma = \frac{2i\varepsilon^5}{a\hbar^2\mu^4}\sqrt{\varepsilon^2 - \mu^2}. \quad (64)$$

Квазиклассические волновые функции в окрестности  $z_{\pm}$  на антистоксовой линии  $n = 0$  (той, что идет вправо и соответствует исходящей волне) принимают следующий вид:

$$\theta_{\pm}^{\text{app}}(s) = \frac{1}{s^{1/4}\gamma^{1/6}} \exp\left(\pm \frac{2i}{3}s^{3/2}\right), \quad s \gg 1 \quad (65)$$

Точное решение уравнения Эйри (64), имеющее асимптотику (65), имеет следующее интегральное представление:

$$\theta(s) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}\gamma^{1/6}} \int_C e^{st+t^3/3} dt, \quad (66)$$

где контур  $C$  представлен на рис 10(а). Контур размещен таким образом, что только седло  $t_1 = i\sqrt{s}$  вносит вклад в асимптотику. Константа перед интегралом (66) выбрана таким образом, что асимптотика (66) при  $s \rightarrow \infty$  в точности совпадает с квазиклассическим выражением (65) для  $\theta_+^{\text{app}}(s)$ . При повороте от правой антистоксовой линии к другой (идя влево под углом  $-2\pi/3$ ) асимптотика решения (66) преобразуется как:

$$\theta_{<}(s) = \frac{1}{\gamma^{1/6}} \left( \frac{\exp\left[\frac{2i}{3}s^{3/2}\right]}{s^{1/4}} - i \frac{\exp\left[-\frac{2i}{3}s^{3/2}\right]}{s^{1/4}} \right). \quad (67)$$

из-за того, что контур интегрирования деформируется согласно рис. 10(б) и оба седла подынтегрального выражения в (66) вносят вклад в интеграл. Как видно, решение слева от барьера разделено на две волны и идеально совпадает с квазиклассическими выражениями (65) в той же области:

$$\theta_{<}(z) = \theta_+(z) \Big|_{z_+} - i\theta_-(z) \Big|_{z_+}. \quad (68)$$

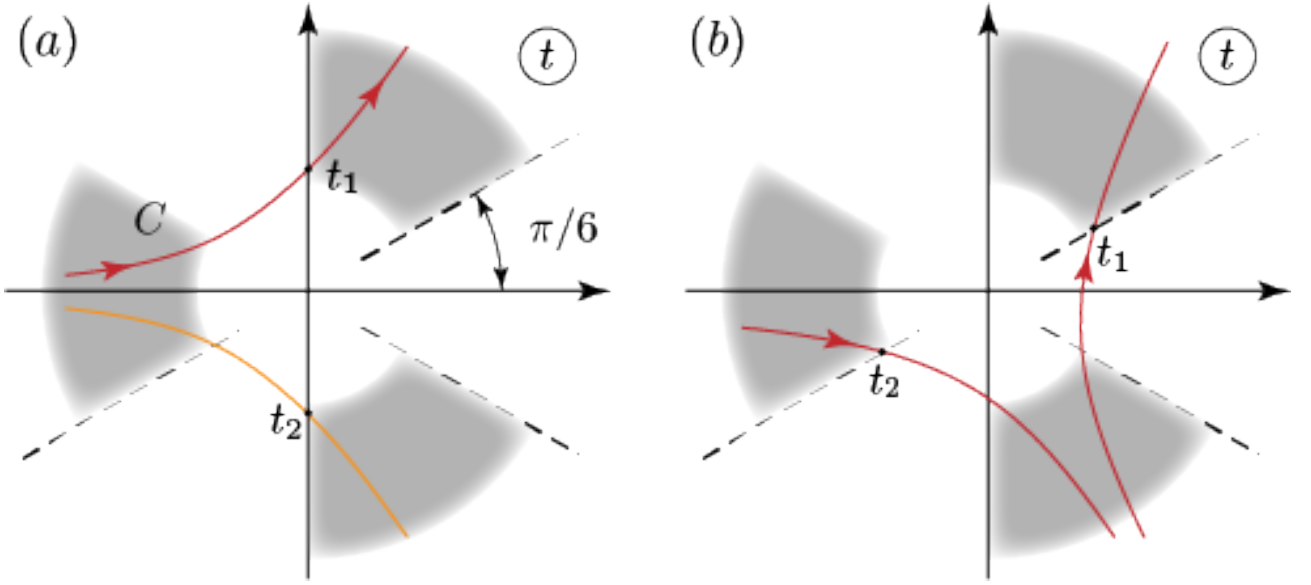


Рис. 10: (a) Расположение контура  $C$ , определяющего решение уравнения 66 для  $\arg s = 0$ . Асимптотические серые области — это области, которые должны содержать конечные точки контура. (для сходимости интеграла).  $t_1, t_2$  — это седла подынтегрального выражения. Контур, нарисованный с помощью точного пути наискорейшего спуска, проходящего через седло  $t_1$ , оранжевая линия — это второй путь наискорейшего спуска, проходящий через седло  $t_2$ . (b) Пути наискорейшего спуска и седла для  $\arg s = -2\pi/3$

Аналитическое продолжение волновой функции (68) на вещественную ось  $z \rightarrow x$  позволяет получить коэффициент отражения:

$$R = e^{-\frac{4}{\hbar v_F} \text{Im} \int_{x_0}^{z_+} \frac{\sqrt{\varepsilon^2(\varphi^2+1)-\mu^2}}{\varphi^2+1} dz}, \quad (69)$$

Коэффициент отражения (69) является одним из основных результатов данной главы. Он имеет типичный квазиклассический вид. Показатель экспоненциальной функции можно оценить как  $\# \varepsilon a / \hbar \gg 1$ , что делает коэффициент отражения экспоненциально малым.

Далее, рассмотрен случай потенциала с полюсом. Для точного решения в окрестности точки поворота получены следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} \psi_{1+, \gtrless}(\zeta) &= \frac{\varepsilon + \mu}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\varepsilon - \mu}{2}} \left( \frac{\zeta}{a} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\varepsilon + \mu}{2a} \zeta^2 + \frac{3\pi i}{4}} \\ \psi_{1-, \gtrless}(\zeta) &= \sqrt{2(\varepsilon - \mu)} \left( \frac{\zeta}{a} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\varepsilon - \mu}{2a} \zeta^2 + \frac{i\pi}{4}}, \end{aligned} \quad (70)$$

где символ  $>$  ( $<$ ) соответствует квазиклассическому решению на правой (левой) анти-стоксовой линии в окрестности точки поворота  $z_p$ . Соотношения (70) записаны в квазиклассическом пределе  $\zeta \gg \sqrt{|a|/\varepsilon}$ .

Получено точное решение уравнения Дирака (52), сведённого к гораздо более простому дифференциальному уравнению:

$$a\psi''[2\zeta^2(\mu+\varepsilon)-a] + \psi'[4\zeta^3\varepsilon(\mu+\varepsilon)-2a\zeta(2\mu+3\varepsilon)] = 0 \quad (71)$$

которое интегрируется в квадратуры:

$$\psi_1(\zeta) = \sqrt{\frac{\zeta}{a}} \left( c_1 - c_2 \frac{\sqrt{\pi}\mu}{2\varepsilon^{3/2}\sqrt{a}} \operatorname{erf}\left[\sqrt{\varepsilon a} \frac{\zeta}{a}\right] \right) e^{\frac{\varepsilon-\mu}{2a}\zeta^2} + c_2 \frac{\varepsilon+\mu}{\varepsilon} \left( \frac{\zeta}{a} \right)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon+\mu}{2a}\zeta^2} \quad (72)$$

Условие наличия Для получения коэффициента отражения, требуется, чтобы на правой антистоксовой линии была только прошедшая квазиклассическая волна, то есть асимптотика решения (72) совпадает с функцией  $\psi_{1+,>}$  в (70). Данное условие позволяет получить следующие решения на левой антистоксовой линии имеем:

$$\psi_1(\zeta) \Big|_{\text{left}} = \psi_{1+,<}(\zeta) + \frac{i\sqrt{\pi}\mu}{2\varepsilon^{3/2}\sqrt{a}} \psi_{1-,<}(\zeta). \quad (73)$$

Эти решения аналитически продолжаются с антистоксовой линии на действительную ось  $x$ . В результате получен следующий коэффициент отражения:

$$R = \frac{\pi \hbar v_F}{|a|} \frac{\mu^2}{4\varepsilon^3} e^{-\frac{4}{\hbar v_F} \operatorname{Im} \int_{x_0}^{z_p} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \mu^2 + \varepsilon^2 \varphi^2(z)}}{1 + \varphi^2(z)} dz}, \quad (74)$$

где  $x_0$  — произвольная точка вещественной оси. Результат (74) дополняет результат (69), полученный для регулярной функции деформации  $\varphi(z)$ . Видно, что эти два соотношения имеют одну и ту же квазиклассическую экспоненту, как и следовало ожидать от квазиклассического анализа. Разница между разными классами потенциалов выражена в предэкспоненциальном множителе.

Сравнивая коэффициенты отражения (69) и (74), можно увидеть, что в отличие от первого, второй явно соблюдает TR-симметрию ТИ. А именно, коэффициент отражения обращается в нуль в случае исчезновения магнитного поля  $\mu \rightarrow 0$ , когда восстанавливается TR-симметрия квазичастичных возбуждений ТИ. Разрешение парадокса неисчезающего при нулевом магнитном поле коэффициента отражения подробно проанализировано в основном тексте диссертации.

Далее, проведено вычисление коэффициента отражения по теории возмущений в Борновском приближении в пределе слабого магнитного поля  $\mu \ll \varepsilon$ . Приводится точное решение уравнения Дирака в отсутствии магнитного поля. Исходный гамильтониан в отсутствии магнитного поля:

$$H = v_F \sigma_y \hat{p} + \frac{\sigma_z}{2} (\varphi \hat{p} + \hat{p} \varphi) \quad (75)$$

после унитарного преобразования

$$\psi(x) = \exp[i\theta(x)\sigma_x] \tilde{\psi}(x), \quad \tan 2\theta(x) = \varphi^{-1}(x), \quad (76)$$

превращает гамильтониан (75) в гораздо более простую форму:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} (v \hat{p} + \hat{p} v) \sigma_z, \quad (77)$$

где  $v(x) = v_F \sqrt{\varphi^2(x) + 1}$ . Гамильтониан (77) имеет следующие точные собственные функции:

$$\psi_{\varepsilon}(x) = \frac{e^{i\varepsilon\tau(x)}}{\sqrt{v(x)}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{\varepsilon}(x) = \frac{e^{-i\varepsilon\tau(x)}}{\sqrt{v(x)}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (78)$$

$$\tau(x) = \int_0^x \frac{dx'}{v(x')} \equiv \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{\varphi^2(x') + 1}}. \quad (79)$$

И ясно видно, что точное решение в (78), движущееся вперед, остается таковым на всей действительной оси, и таким образом имеется безотражательная ситуация, ожидаемая из TR-симметрии системы.

Для построения теории возмущений получена функция Грина для преобразованного гамильтониана (77):

$$G(\epsilon; x, x') = -\frac{i}{2}(1 + \text{sign}[\tau(x) - \tau(x')]\sigma_z) \frac{e^{i\epsilon|\tau(x) - \tau(x')|}}{\sqrt{v(x)v(x')}}, \quad (80)$$

Затем рассмотрено возмущение, создаваемое магнитным полем; в исходном базисе это  $V = \mu\sigma_z$ . При унитарном преобразовании  $\hat{U}$  это становится:

$$\tilde{V}(x) = \frac{\mu}{\varphi^2(x) + 1} [\varphi(x)\sigma_z - \sigma_y] \quad (81)$$

Отражённая волна по теории возмущений равна:

$$\psi_{\text{ref}}(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} G(\epsilon; x, x') \tilde{V}(x') \psi_{\varepsilon}(x') dx' \quad (82)$$

Получена отражённая волна в теории возмущений первого порядка:

$$\psi_{\text{ref}} = r \psi_{\varepsilon}(x), \quad r = \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2i\varepsilon\tau(x')}}{1 + \varphi^2(x')} dx' \quad (83)$$

где  $r$  — конечная амплитуда отражения в приближении Борна. Для случая потенциала с полюсом, вычисление  $r$  соответствует взятию интеграла, входящего в (83) методом перевала:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2i\varepsilon\tau(x')}}{1 + \varphi^2(x')} dx' \approx e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon a}} \frac{e^{2i\varepsilon\tau(z_p)}}{2\varepsilon} \quad (84)$$

где  $z_p$ :  $\varphi(z_p) = \infty$  — седловая точка функции  $\tau(z)$  (которая также является точкой поворота для квазиклассического импульса). Таким образом, получен коэффициент отражения:

$$R = \frac{\pi\mu^2}{4|a|\varepsilon^3} e^{-4\varepsilon \text{Im} \int_0^{z_0} \frac{dx}{\sqrt{1+\varphi^2(x)}}} \quad (85)$$

Этот результат совпадает с квазиклассическим коэффициентом отражения (74) в пределе  $\mu \ll \varepsilon$ . Полученное совпадение даёт дополнительное убедительное доказательство корректности квазиклассического результата (74)

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем:

1. Изучены непертурбативные решения действия АЭШ, описывающие одноэлектронное устройство, с использованием техники Келдыша. Рассмотрен произвольный неравновесный режим и получена точная форма инстантонов. Вычислено значение действия на инстантонах. Доказано, что оно не зависит от функций распределения электронов, с условием, что они стационарны.
2. Изучено магнитосопротивление ВПМ с аксиальной анизотропией. Продемонстрирована сильная зависимость магнитосопротивления от полярного и азимутального углов между осью анизотропии и плоскостью приложенного напряжения.
3. Исследовано рассеяние квазичастиц на краевых дефектах двумерного ТИ в однородном магнитном поле. Используются два взаимодополняющих подхода: метод Покровского-Халатникова и теория возмущений в магнитном поле. Продемонстрировано совпадение результатов этих методов в общей области применимости. Получены коэффициенты отражения для двух наиболее важных классов деформационных потенциалов.

## Публикации автора по теме диссертации

1. A.S. Dotdaev, Ya. Rodionov and K. Tikhonov. *Instantons in the out-of-equilibrium Coulomb blockade*. Physics Letters A **419**, 127736 (2021)
2. A. S. Dotdaev, Ya. I. Rodionov, K. I. Kugel and B. A. Aronzon. *Effects of anisotropy on the high-field magnetoresistance of Weyl semimetals*. Physical Review B **108**, 165125 (2023)
- 3(a). A.S. Dotdaev, Y.I. Rodionov, A.V. Rozhkov and P.D. Grigoriev. *Semiclassical Scattering by Edge Imperfections in Topological Insulators in a Magnetic Field*. Jetp Letters **120**, 675–686 (2024)
- 3(b). А.Ш. Дотдаев, Я.И. Родионов, А.В. Рожков и П.Д. Григорьев. Квазиклассическое рассеяние на краевых дефектах в топологических изоляторах в магнитном поле. Письма в ЖЭТФ **120**, 701 (2024)

## Список литературы

- (1) G. Schön и A. D. Zaikin, *Physics Reports*, 1990, **198**, 237–412.
- (2) e. a. L.P. Kouwenhoven, *Electron Transport in Quantum Dots*, Kluwer, 1997.
- (3) L. Bitton и др., *Phys. Rev. Lett.*, 2011, **106**, 016803.
- (4) e. a. A.S. Dzurak, *Phys. Rev. B*, 1997, **55**, R10197.
- (5) e. a. R. Scheibner, *Phys. Rev. B*, 2007, **75**, 041301.
- (6) e. a. F. Giazotto, *Rev. Mod. Phys.*, 2006, **78**, 217.
- (7) A. Altland и др., *Annals of Physics*, 2005, **321**, 2566–2603.

- (8) A. Burkov и L. Balents, *Physical review letters*, 2011, **107**, 127205.
- (9) X. Wan и др., *Phys. Rev. B*, 2011, **83**, 205101.
- (10) S.-Y. Xu и др., *Science*, 2015, **347**, 294—298.
- (11) B. Lv и др., *Phys. Rev. X*, 2015, **5**, 031013.
- (12) Z. K. Liu и др., *Nat. Mater.*, 2014, **13**, 677—681.
- (13) M. Neupane и др., *Nat. Commun.*, 2014, **5**, 3786.
- (14) S. Borisenko и др., *Phys. Rev. Lett.*, 2014, **113**, 027603.
- (15) S. Jeon и др., *Nat. Mater.*, 2014, **13**, 851—856.
- (16) E. Fradkin, *Phys. Rev. B*, 1986, **33**, 3263.
- (17) S. Syzranov, L. Radzihovsky и V. Gurarie, *Phys. Rev. Lett.*, 2015, **114**, 166601.
- (18) S.-Y. Xu и др., *Science*, 2015, **349**, 613—617.
- (19) N. Armitage, E. Mele и A. Vishwanath, *Rev. Mod. Phys.*, 2018, **90**, 015001.
- (20) A. Burkov, *Ann. Rev. Condens. Matter Phys.*, 2018, **9**, 359—378.
- (21) D. Son и B. Spivak, *Phys. Rev. B*, 2013, **88**, 104412.
- (22) S. Parameswaran и др., *Phys. Rev. X*, 2014, **4**, 031035.
- (23) X. Xiao, K. T. Law и P. A. Lee, *Phys. Rev. B*, 2017, **96**, 165101.
- (24) J. Klier, I. V. Gornyi и A. D. Mirlin, *Phys. Rev. B*, 2017, **96**, 214209.
- (25) Y. I. Rodionov, K. I. Kugel и B. A. Aronzon, *Phys. Rev. B*, 2023, **107**, 155120.
- (26) Y. I. Rodionov, K. I. Kugel и F. Nori, *Phys. Rev. B*, 2015, **92**, 195117.
- (27) I. Žutić, J. Fabian и S. Das Sarma, *Rev. Mod. Phys.*, 2004, **76**, 323—410.
- (28) C. Nayak и др., *Rev. Mod. Phys.*, 2008, **80**, 1083—1159.
- (29) J. Moore, *Nature Physics*, 2009, **5**, 378—380.
- (30) M. König и др., *Science*, 2007, **318**, 766—770.
- (31) D. Hsieh и др., *Nature*, 2008, **452**, 970—974.
- (32) H. Grabert и H. Horner, *Special issue on single charge tunneling*, Springer, 1991.
- (33) H. Grabert и M. H. Devoret, *Single charge tunneling: Coulomb blockade phenomena in nanostructures*, Springer Science & Business Media, 2013, т. 294.
- (34) I. Aleiner, P. Brouwer и L. Glazman, *Physics Reports*, 2002, **358**, 309—440.
- (35) K. Likharev и A. Zorin, *Journal of low temperature physics*, 1985, **59**, 347—382.
- (36) D. Averin и K. Likharev, *Journal of low temperature physics*, 1986, **62**, 345—373.
- (37) Y. M. Blanter и M. Büttiker, *Phys. Rep.*, 2000, **336**, 1.
- (38) K. K. Likharev, *Proceedings of the IEEE*, 1999, **87**, 606—632.

- (39) T. Liang и др., *Nat. Mater.*, 2015, **14**, 280—284.
- (40) J. Feng и др., *Phys. Rev. B*, 2015, **92**, 081306.
- (41) M. Novak и др., *Phys. Rev. B*, 2015, **91**, 041203.
- (42) Y. Zhao и др., *Phys. Rev. X*, 2015, **5**, 031037.
- (43) Z. K. Liu и др., *Science*, 2014, **343**, 864—867.
- (44) G. Dhakal и др., *Phys. Rev. B*, 2022, **106**, 125124.
- (45) Y. Huang и др., *Adv. Mater.*, 2023, **35**, 2208362.
- (46) G. M. Gusev и др., *Phys. Rev. B*, 2014, **89**, 125305.
- (47) C. Pasquier и др., *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **70**, 69—72.
- (48) A. G. Huibers и др., *Phys. Rev. Lett.*, 1998, **81**, 1917—1920.
- (49) O. Bitton и др., *Nature Communications*, 2017, **8**, 402.
- (50) A. A. Abrikosov, *Phys. Rev. B*, 1998, **58**, 2788—2794.
- (51) V. Ambegaokar, U. Eckern и G. Schön, *Phys. Rev. Lett.*, 1982, **48**, 1745—1748.
- (52) L. V. Keldysh, *Sov. Phys. JETP*, 1965, **20**, 1018—1026.
- (53) J. Klier, I. V. Gornyi и A. D. Mirlin, *Phys. Rev. B*, 2015, **92**, 205113.
- (54) V. R. Khalilov и I. V. Mamsurov, *The European Physical Journal C*, 2015, **75**, 167.
- (55) J.-P. Jay-Gerin, M. Aubin и L. Caron, *Solid State Commun.*, 1977, **21**, 771—774.
- (56) V. Pokrovskii и I. Khalatnikov, *Soviet Phys. JETP*, 1961, **13**, 1207—1210.
- (57) X.-L. Qi и S.-C. Zhang, *Rev. Mod. Phys.*, 2011, **83**, 1057—1110.
- (58) Y. A. Bychkov и E. I. Rashba, *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 1984, **17**, 6039—6045.
- (59) J. Hinz и др., *Semiconductor Science and Technology*, 2006, **21**, 501—506.
- (60) H. Yang и др., *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2014, **26**, 395005.
- (61) Y. Zhang и др., *Nature Physics*, 2010, **6**, 584—588.
- (62) T. Kernreiter и др., *Physical Review X*, 2016, **6**, 021010.
- (63) A. A. Zyuzin, M. D. Hook и A. A. Burkov, *Phys. Rev. B*, 2011, **83**, 245428.
- (64) M. V. Berry, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1982, **15**, 3693.